Escola Secundária de Paredes

Proposta de Resolução da Ficha de Trabalho 1

Matemática A

11.º Ano de Escolaridade | Turma: K

1. .

1.1. Pretende-se saber se $\exists_{n\in\mathbb{N}} : u_n = -\frac{79}{41}$

Ora,

$$u_n = -\frac{79}{41} \Leftrightarrow -2 + \frac{3}{1+4n} = -\frac{79}{41} \Leftrightarrow \frac{3}{1+4n} = 2 - \frac{79}{41} \Leftrightarrow \frac{3}{1+4n} = \frac{82-79}{41} \Leftrightarrow \frac{3}{1+4n} = \frac{3}{41} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+4n = 41 \Leftrightarrow 4n = 41-1 \Leftrightarrow 4n = 40 \Leftrightarrow n = \frac{40}{4} \Leftrightarrow n = 10 \in \mathbb{N}$$

Logo, $-\frac{79}{41}$ é termo da sucessão (u_n). É o décimo termo

1.2. $$u_{n+1} - u_n = -2 + \frac{3}{1+4(n+1)} - \left(-2 + \frac{3}{1+4n}\right) = -2 + \frac{3}{4n+5} + 2 - \frac{3}{1+4n} = \frac{3}{4n+5} - \frac{3}{1+4n} =$$

$$= \frac{3(1+4n) - 3(4n+5)}{(4n+5)(1+4n)} = \frac{3+12n-12n-15}{(4n+5)(1+4n)} = -\frac{12}{(4n+5)(1+4n)} < 0, \forall_{n\in\mathbb{N}}$$

Logo, a sucessão (u_n) é estritamente decrescente

1.3. $u_n = -2 + \frac{3}{1+4n}$

$n \geq 1, \forall_{n\in\mathbb{N}}$
$\therefore 4n \geq 4, \forall_{n\in\mathbb{N}}$
$\therefore 4n+1 \geq 5, \forall_{n\in\mathbb{N}}$
$\therefore \frac{1}{4n+1} \leq \frac{1}{5}, \forall_{n\in\mathbb{N}}$

Por outro lado, a sucessão de termo geral $\frac{1}{4n+1}$ tem os termos todos positivos, assim,

$0 < \frac{1}{4n+1}, \forall_{n\in\mathbb{N}}$

Portanto,

$0 < \frac{1}{4n+1} \leq \frac{1}{5}, \forall_{n\in\mathbb{N}}$

$\therefore 0 < \frac{3}{4n+1} \leq \frac{3}{5}, \forall_{n\in\mathbb{N}}$

$\therefore -2 < -2 + \frac{3}{4n+1} \leq -2 + \frac{3}{5}, \forall_{n\in\mathbb{N}}$

$\therefore -2 < u_n \leq -\frac{7}{5}, \forall_{n\in\mathbb{N}}$

Logo, (u_n) é limitada

O conjunto dos termos da sucessão (u_n), admite:

Minorante: -2

Majorante: $-\frac{7}{5}$

2. .

2.1. Pretende-se saber se $\exists_{n\in\mathbb{N}} : v_n = \dfrac{3}{512}$

Ora,

$$v_n = \frac{3}{512} \Leftrightarrow \frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{3}{512} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{3}{512}\div\frac{3}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{1}{256} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n-1=4 \Leftrightarrow n=4+1 \Leftrightarrow n=5\in\mathbb{N}$$

Logo, $\dfrac{3}{512}$ é termo da sucessão (v_n). É o quinto termo da sucessão (v_n)

2.2. $$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1-1}}{\frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n}}{\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-(n-1)} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-n+1} = \frac{1}{4} \text{ (constante)}, \forall_{n\in\mathbb{N}}$$

Logo, a sucessão (v_n) é uma progressão geométrica, e a sua razão é $\dfrac{1}{4}$

2.3. Ora, $v_1 = \dfrac{3}{2}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^{1-1} = \dfrac{3}{2}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^{0} = \dfrac{3}{2}\times 1 = \dfrac{3}{2}$

Assim,

$$v_n : \begin{cases} v_1 = \dfrac{3}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{4}v_n, \forall_{n\in\mathbb{N}} \end{cases}$$

2.4. $$v_{n+1}-v_n = \frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1-1} - \frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\times\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} =$$

$$= \frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\times\left(\frac{1}{4}-1\right) = \frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\times\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{9}{8}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} < 0, \forall_{n\in\mathbb{N}}$$

Logo, a sucessão (v_n) é estritamente decrescente

2.5. Ora, $v_{17} = \dfrac{3}{2}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^{16}$, a razão $=\dfrac{1}{4}$, e o número de parcelas da soma é $25-17+1=9$

Assim,

$$S = v_{17}+v_{18}+v_{19}+\cdots+v_{25} = \frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{16}\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{9}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{16}\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{9}}{\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{16}\times\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{9}\right] = 2\times\frac{1}{4^{16}}\times\left(1-\frac{1}{4^9}\right) = 2\times\frac{1}{4^{16}}\times\frac{4^9-1}{4^9} = 2\times\frac{4^9-1}{4^{25}} = \frac{524286}{4^{25}}$$

3. .

3.1. Ora,

$$a_{n+1}-a_n = \frac{1}{3}+a_n-a_n = \frac{1}{3} \text{ (constante)}, \forall n\in\mathbb{N}$$

Logo, a sucessão (a_n) é uma progressão aritmética, de razão $\dfrac{1}{3}$

Quanto ao seu termo geral:

$$a_n = \frac{1}{5}+(n-1)\times\frac{1}{3} = \frac{1}{3}n-\frac{1}{3}+\frac{1}{5} = \frac{1}{3}n-\frac{5}{15}+\frac{3}{15} = \frac{1}{3}n-\frac{2}{15} = \frac{5n}{15}-\frac{2}{15} = \frac{5n-2}{15}$$

3.2. Ora,

$$a_1 = \frac{1}{5},\ a_{89} = \frac{5\times 89 - 2}{15} = \frac{443}{15} \text{ e } a_{120} = \frac{5\times 120-2}{15} = \frac{598}{15}$$

$$S = a_{90} + a_{91} + a_{92} + \cdots + a_{120} = S_{120} - S_{89} = \frac{\frac{1}{5}+\frac{598}{15}}{2}\times 120 - \frac{\frac{1}{5}+\frac{443}{15}}{2}\times 89 =$$

$$= \frac{\frac{3}{15}+\frac{598}{15}}{2}\times 120 - \frac{\frac{3}{15}+\frac{443}{15}}{2}\times 89 = \frac{601}{15}\times 60 - \frac{\frac{446}{15}}{2}\times 89 = \frac{36060}{15} - \frac{39694}{30} = \frac{72120}{30} - \frac{39694}{30} =$$

$$= \frac{32426}{30} = \frac{16213}{15}$$

Outro processo

$$a_{90} = \frac{5\times 90 - 2}{15} = \frac{448}{15} \text{ e } a_{120} = \frac{5\times 120 - 2}{15} = \frac{598}{15}$$

$$S = a_{90}+a_{91}+a_{92}+\cdots+a_{120} = \frac{\frac{448}{15}+\frac{598}{15}}{2}\times(120-90+1) = \frac{\frac{1046}{15}}{2}\times 31 = \frac{1046}{30}\times 31 = \frac{32426}{30} = \frac{16213}{15}$$

4. .

4.1. Sabe-se que $b_{35} = -1784$ e $b_{70} = 2b_{35} - 1$

Assim, sendo r, a razão da progressão aritmética, resulta,

$$b_{70} = 2b_{35} - 1 \Leftrightarrow b_{35} + (70-35)\times r = 2b_{35} - 1 \Leftrightarrow -1784 + 35r = 2\times(-1784) - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1784 + 35r = -3569 \Leftrightarrow 35r = -3569 + 1784 \Leftrightarrow 35r = -1785 \Leftrightarrow r = -\frac{1785}{35} \Leftrightarrow r = -51$$

Portanto,

$$b_{35} = b_1 + (35-1)\times(-51) \Leftrightarrow -1784 = b_1 + 34\times(-51) \Leftrightarrow -1784 = b_1 - 1734 \Leftrightarrow b_1 = -1784 + 1734 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow b_1 = -50$, c.q.d.

4.2. Ora,

$b_n = b_{35} + (n-35)\times(-51) = -1784 - 51n + 1785 = -51n + 1 \twoheadrightarrow$ expressão do termo geral da progressão aritmética (b_n)

4.3. Ora,

$b_1 = -50$, $b_{30} = -51\times 30 + 1 = -1529$ e $b_{65} = -51\times 65 + 1 = -3314$

$$S = b_{31} + b_{32} + b_{33} + \cdots + b_{65} = S_{65} - S_{30} = \frac{-50-3314}{2}\times 65 - \frac{-50-1529}{2}\times 30 =$$

$$= \frac{-3364}{2}\times 65 - \frac{-1579}{2}\times 30 = \frac{-218660}{2} - \frac{-47370}{2} = -109330 + 23685 = -85645$$

Outro processo

$b_{31} = -51\times 31 + 1 = -1580$ e $b_{65} = -51\times 65 + 1 = -3314$

$$S = b_{31} + b_{32} + b_{33} + \cdots + b_{65} = \frac{-1580-3314}{2}\times(65-31+1) = \frac{-4894}{2}\times 35 = -2447\times 35 = -85645$$

4.4. Sabe-se que que $S_n = -23685$

Então,

$$S_n = -23685 \Leftrightarrow \frac{-50-51n+1}{2} \times n = -23685 \Leftrightarrow \frac{-49n-51n^2}{2} = -23685 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -51n^2 - 49n = -47370 \Leftrightarrow -51n^2 - 49n + 47370 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{49 \pm \sqrt{(-49)^2 - 4 \times (-51) \times 47370}}{2 \times (-51)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{49 \pm \sqrt{9665881}}{-102} \Leftrightarrow n = \frac{49 \pm 3109}{-102} \Leftrightarrow n = \frac{49 - 3109}{-102} \vee n = \frac{49 + 3109}{-102} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 30 (\in \mathbb{N}) \vee n = -\frac{1579}{51} (\notin \mathbb{N})$$

Logo, $n = 30$

5. .

5.1. Ora, os termos da sucessão (c_n) pertencem a $V_{0.01}(2)$, se , e só se, $|c_n - 2| < 0.01$

Assim,

$$|c_n - 2| < 0.01 \Leftrightarrow \left|\frac{4n-2}{1+2n} - 2\right| < \frac{1}{100} \Leftrightarrow \left|\frac{4n-2-2-4n}{1+2n}\right| < \frac{1}{100} \Leftrightarrow \left|\frac{-4}{1+2n}\right| < \frac{1}{100} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{1+2n} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{1+2n}{4} > 100 \Leftrightarrow 1+2n > 400 \Leftrightarrow 2n > 400-1 \Leftrightarrow 2n > 399 \Leftrightarrow n > \frac{399}{2}$$

Basta tomar $p = 200$

A partir do termo de ordem duzentos(inclusive), todos os termos da sucessão (c_n) pertencem a $V_{0.01}(2)$

5.2. Ora,

$$|c_n - 2| < \frac{1}{1000} \Leftrightarrow \left|\frac{4n-2}{1+2n} - 2\right| < \frac{1}{1000} \Leftrightarrow \left|\frac{4n-2-2-4n}{1+2n}\right| < \frac{1}{1000} \Leftrightarrow \left|\frac{-4}{1+2n}\right| < \frac{1}{1000} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{1+2n} < \frac{1}{1000} \Leftrightarrow \frac{1+2n}{4} > 1000 \Leftrightarrow 1+2n > 4000 \Leftrightarrow 2n > 4000-1 \Leftrightarrow 2n > 3999 \Leftrightarrow n > \frac{3999}{2}$$

Basta tomar $p = 2000$

A partir do termo de ordem dois mil, todos os termos da sucessão (c_n) satisfazem a condição $|c_n - 2| < \frac{1}{1000}$

5.3. Ora, $\lim(c_n) = 2$, se , e só se, para todo o número real $\delta > 0$, existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} : n \geq p \Rightarrow |c_n - 2| < \delta$$

Assim,

$$|c_n - 2| < \delta \Leftrightarrow \left|\frac{4n-2}{1+2n} - 2\right| < \delta \Leftrightarrow \left|\frac{4n-2-2-4n}{1+2n}\right| < \delta \Leftrightarrow \left|\frac{-4}{1+2n}\right| < \delta \Leftrightarrow \frac{4}{1+2n} < \delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+2n}{4} > \frac{1}{\delta} \Leftrightarrow 1+2n > \frac{4}{\delta} \Leftrightarrow 2n > \frac{4}{\delta} - 1 \Leftrightarrow 2n > \frac{4-\delta}{\delta} \Leftrightarrow n > \frac{4-\delta}{2\delta}$$

Basta tomar para p, o menor número natural superior a $\frac{4-\delta}{2\delta}$

Logo, $\lim(c_n) = 2$

6. Ora, $\lim\left(\dfrac{1+5n}{3n+4}\right)=\dfrac{5}{3}$, se , e só se, para todo o número real $\delta>0$, existe uma ordem $p\in\mathbb{N}$ tal que,

$\forall_{n\in\mathbb{N}}: n\geq p \Rightarrow \left|\dfrac{1+5n}{3n+4}-\dfrac{5}{3}\right|<\delta$

Assim,

$$\left|\frac{1+5n}{3n+4}-\frac{5}{3}\right|<\delta \Leftrightarrow \left|\frac{3(1+5n)}{3(3n+4)}-\frac{5(3n+4)}{3(3n+4)}\right|<\delta \Leftrightarrow \left|\frac{3+15n-15n-20}{9n+12}\right|<\delta \Leftrightarrow \left|\frac{-17}{9n+12}\right|<\delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{17}{9n+12}<\delta \Leftrightarrow \frac{9n+12}{17}>\frac{1}{\delta} \Leftrightarrow 9n+12>\frac{17}{\delta} \Leftrightarrow 9n>\frac{17}{\delta}-12 \Leftrightarrow 9n>\frac{17-12\delta}{\delta} \Leftrightarrow n>\frac{17-12\delta}{9\delta}$$

Basta tomar para p, o menor número natural superior a $\dfrac{17-12\delta}{9\delta}$

Logo, $\lim\left(\dfrac{1+5n}{3n+4}\right)=\dfrac{5}{3}$