Probabilidades e Combinatória (26–40 pontos)

1. Combinatória (0–14 pontos)

> Este é um excerto do meu livro "**Arrasa no Exame: Matemática A**". Descobre mais sobre o livro, incluindo um vídeo de apresentação, em `https://loja.ricardo-ferreira.pt/produto/exame-matematica-a/`.

1.1 Treino: Como contar

1.1.1 Estratégia Geral

Para resolvermos qualquer exercício de combinatória, precisamos de dois passos.

(1)	"Ensinar a avozinha"
(2)	Traduzir para matemática

Primeiro de tudo, "ensinamos a avozinha", ou seja, **explicamos todo o nosso processo em Português**. As únicas palavras que precisamos são

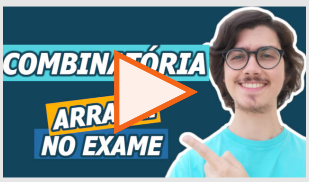
"e", "ou", "escolher", "ordenar".

Depois, é só **traduzir para linguagem matemática**: ficava então

$$\times, +, {}^{n}C_k, n!$$

A partir de agora, vamos ver como cada uma destas palavras se relaciona com o respetivo símbolo matemático.

1.1.2 Como contar I:"E (quantas opções)?"



Vê o Vídeo!
Capítulo: "Permutações (só o início)"
(1:03–2:05)

Exercício 1.1

Num certo café, o menu de almoço inclui uma bebida, uma sandes e um pacote de batatas fritas. Sabe-se que esse menu tem três opções de bebida, quatro opções de sandes e duas opções de batatas fritas.

Seguindo os passos seguintes, determina de quantas maneiras diferentes podemos escolher o menu de almoço.

1. Primeiro, "ensina a avozinha", ou seja, descreve, passo a passo e em Português, como escolher o menu.
2. E depois, "traduz para matemática". Fazendo as contas, obténs o número de maneiras diferentes de escolher o menu.

Resolução (pág. 10)

Primeiro, ensina a avozinha! Depois, traduz para matemática!

Exercício 1.2

O Carlos quer pintar as quatro divisões da sua casa. Sabe-se que o Carlos tem cinco cores de tinta e vai pintar cada divisão de uma só cor.

Seguindo os passos seguintes, determina de quantas maneiras diferentes o Carlos pode pintar as quatro divisões da sua casa.

1. Primeiro, "ensina a avozinha", ou seja, descreve, passo a passo e em Português, como pintar as quatro divisões.
2. E depois, "traduz para matemática". Fazendo as contas, obténs o número de maneiras diferentes de pintar as quatro divisões.

Resolução (pág. 10)

Primeiro, ensina a avozinha! Depois, traduz para matemática!

Exercício 1.3

O Frederico, para proteger o seu telemóvel, quer escolher um código de quatro dígitos, usando apenas os dígitos de 1 a 4. De quantas maneiras é que o Frederico pode escolher o código se:

1. puder escolher qualquer código
2. o primeiro dígito for 4
3. o primeiro dígito for 4 e o último dígito for um número ímpar
4. o código for um número (estritamente) menor que 3000.
5. o código for uma capicua (um número que se lê de igual forma da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda)
6. nenhum dos dígitos do código se repetir

Resolução (pág. 10)

1.1.3 Como contar II:“Ou”

Quando **a nossa primeira escolha afeta as opções seguintes**, então não podemos contar tudo de uma só vez. Em vez disso, temos de separar em casos. E aí, usamos o **“ou"**, que corresponde ao sinal $+$.

Exercício 1.4

O Frederico, para proteger o seu telemóvel, quer escolher um código de quatro dígitos, usando apenas os dígitos de 1 a 4.

Seguindo os passo seguintes, determina de quantas maneiras diferentes é que o Frederico pode escolher este código, sabendo que o código é um número (estritamente) menor que 2300.

Como o **primeiro dígito afeta as nossas opções para os dígitos seguintes**, temos de separar em casos:

1. Primeiro, pensamos no caso em que o primeiro dígito é 1. Quando o primeiro dígito é 1, de quantas maneiras diferentes podemos escolher esse código?
2. Segundo, pensamos no caso em que o primeiro dígito é 2. Quando o primeiro dígito é 2, de quantas maneiras diferentes podemos escolher esse código?
3. Terceiro, pensamos no caso em que o primeiro dígito é 3 ou 4. Quando o primeiro dígito é 3 ou 4, de quantas maneiras diferentes podemos escolher esse código?
4. Combinando as tuas respostas anteriores, determina o número de maneiras diferentes de escolher esse código. (Se quiseres, começa por “ensinar a avozinha” e depois “traduz para Matemática”).

Resolução (pág. 10)

“Ou? +.”

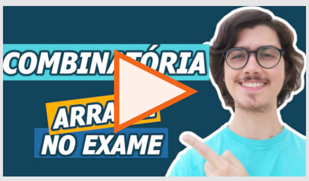
Exercício 1.5

Quantos números naturais existem no intervalo $]230,570[$, contendo apenas os algarismos $2,3,5$ e 7?

Resolução (pág. 10)

“Se a primeira escolha afeta as opções seguintes, então separa em casos.”

1.1.4 Como contar III:“Ordenar”



Vê o Vídeo!
Capítulo: “Permutações (só o fim)”
(2:05–3:26)

Exercício 1.6

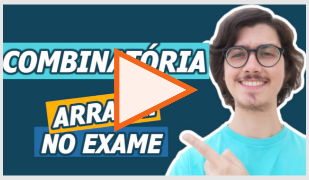
De quantas maneiras diferentes podes distribuir cinco pessoas num carro de cinco lugares, se:

1. todas podem conduzir
2. só uma delas pode conduzir.
3. só três delas podem conduzir.
4. só uma delas não pode conduzir.
5. há dois adultos e três crianças, em que as três crianças ocupam os três lugares de trás.
6. há três adultos e duas crianças, em que as duas crianças ocupam dois dos três lugares de trás.

Resolução (pág. 11)

Ordenar? $n!$ (assim, já não tens de estar sempre a pensar em "E quantas opções?")

1.1.5 Como contar IV:"Escolher"



Vê o Vídeo!
Capítulo: "Combinações"
(3:26–5:49)

Exercício 1.7

O Roberto vai à praia e quer levar consigo cinco livros: dois romances e três livros de autoajuda. Sabe-se que o Roberto tem em casa cinco romances e seis livros de autoajuda.

Seguindo os passos seguintes, determina de quantas maneiras diferentes o Roberto pode escolher os cinco livros.

1. Primeiro, "ensina a avozinha", ou seja, descreve, passo a passo e em Português, como escolher os cinco livros.
2. E agora, "traduz para matemática". Fazendo as contas (na opção `nCr` da tua calculadora, ou à mão, usando a fórmula ${}^nC_k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$), obténs o número de maneiras diferentes de escolher os cinco livros.

Resolução (pág. 11)

Escolher? ${}^nC_k$

Exercício 1.8

De um grupo de sete amigos (três rapazes e quatro raparigas) vão escolher quatro amigos para formar uma comissão de finalistas.

Determina o número de maneiras diferentes de escolher essa comissão de finalistas se:

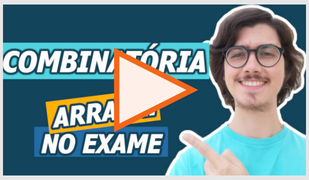
1. não há qualquer restrição
2. o José Carlos (um dos sete amigos) faz parte da comissão
3. a comissão tem o mesmo número de raparigas e de rapazes
4. a comissão tem mais raparigas do que rapazes

5. a comissão tem pelo menos um rapaz e pelo menos uma rapariga

Resolução (pág. 11)

1.2 Treino: Truques Especiais de Contagem

1.2.1 Truque I: "Contrário"



Vê o Vídeo!
Capítulo: "Truques Especiais (só uma parte)"
(18:26–20:30)

Exercício 1.9

Dentro de um saco, estão três bolas azuis e quatro bolas brancas indistinguíveis ao tato.

Seguindo os passos seguintes, determina de quantas maneiras é que podes retirar três bolas do saco de modo que **pelo menos** uma das bolas seja azul.

1. Primeiro, "conta o todo" (ou seja, os casos possíveis). Neste caso, é o número de maneiras de escolher três bolas do saco.
2. Agora, "conta o contrário". Qual é o contrário de retirar pelo menos uma bola azul? Ora, é retirar zero bolas azuis, ou seja, retirar três bolas brancas. De quantas maneiras há para fazer isso?
3. Por fim, "ao todo, subtrai o contrário": juntando as tuas respostas anteriores, determina de quantas maneiras diferentes podes retirar três bolas do saco de modo que **pelo menos** uma das bolas seja azul.

Resolução (pág. 12)

"Pelo menos"? Ao todo, subtrai o contrário!

Exercício 1.10

A Sandra vai formar um código de quatro dígitos, usando os dígitos de 0 a 9, sem repetir nenhum dígito.

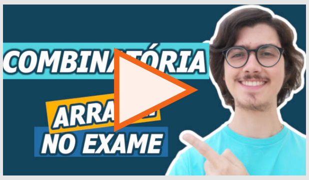
De quantas maneiras diferentes é que a Sandra pode escolher esse código de forma que esse código:

1. tenha **pelo menos** um dígito par
2. tenha **no mínimo** um dígito par
3. tenha **no máximo** três dígitos pares
4. **não** tenha o dígito 9
5. tenha **no máximo** dois dígitos pares

Resolução (pág. 12)

“Não”, “Pelo menos”, “No máximo”, “No mínimo”, etc? Contrário!

1.2.2 Truque II: “Caixa”



Vê o Vídeo!
Capítulo: “Truques Especiais (só uma parte)”
(20:30–22:15)

Exercício 1.11

A Maria Helena quer dispor os seus seis livros (dois de Matemática e quatro de Português) lado a lado numa prateleira.

Seguindo os passos seguintes, determina de quantas maneiras diferentes a Maria Helena pode dispor os seus seis livros de modo que os dois livros de Matemática fiquem juntos.

1. Primeiro, coloca os livros que queres que fiquem juntos numa caixa imaginária e “ordena o que está dentro da caixa”. De quantas maneiras diferentes podes ordenar os dois livros dentro dessa caixa?
2. Agora, “ordena o que está de fora”. Ou seja, ordena a caixa mais os quatro livros de Português. De quantas maneiras diferentes há para ordenar a caixa e os quatro livros de Português?
3. Juntando as tuas respostas anteriores, determina de quantas maneiras diferentes a Maria Helena pode dispor os seus seis livros de modo que os dois livros de Matemática fiquem juntos.

Resolução (pág. 12)

“Juntos”? Mete-os numa caixa, ordena tudo o que está dentro de cada caixa e depois ordena tudo o que está de fora!

Exercício 1.12

Todos os membros de uma comitiva olímpica — dois treinadores, dois dirigentes e cinco atletas — vão tirar uma fotografia, estando dispostos lado a lado.

De quantas maneiras diferentes podemos dispor os nove membros da comitiva se:

1. os dois dirigentes ficam **juntos**
2. os dois dirigentes ficam **juntos** e os cinco atletas ficam **juntos**
3. os dois dirigentes ficam **juntos**, os cinco atletas ficam **juntos** e os dois treinadores ficam **juntos**.

Resolução (pág. 13)

“Juntos”? Mete-os numa caixa, ordena tudo o que está dentro de cada caixa e depois ordena tudo o que está de fora!

Exercício 1.13

Vão-se dispor, lado a lado e em linha reta, sete bolas numeradas de 1 a 7 (três azuis, duas brancas e duas castanhas).

De quantas maneiras diferentes podemos dispor as sete bolas de modo que as bolas brancas fiquem uma ao lado da outra e que as bolas castanhas fiquem uma ao lado da outra?

Resolução (pág. 13)

"Uma ao lado da outra"? Juntos, pá!

1.3 Exercícios Modelo: Combinatória

1.3.1 Exercícios de Contar

Exercício 1.14

Dez pessoas (seis adultos e quatro jovens) vão fazer uma viagem. Para isso, vão utilzar dois automóveis (um preto e um cinzento) de cinco lugares cada.

Sabendo que todos os adultos podem conduzir, que nenhum jovem pode conduzir e que cada automóvel levará dois jovens cada, escreve uma expressão que dê o número de maneiras diferentes de distribuir as dez pessoas pelos dez lugares disponíveis.

Resolução (pág. 13)

"Escreve uma expressão?" Isso significa que não tens de fazer as contas!

Exercício 1.15

Considera todos os números naturais de seis algarismos que se podem escrever utilizando um algarismo 4, dois algarismos 5 e três algarismos 6.

Determina quantos destes números são múltiplos de 2 e inferiores a 600 mil.

Resolução (pág. 13)

Múltiplos de 2? São os números que estão na tabuada do 2 (ou seja, os números que dão para dividir por 2).

Exercício 1.16

Considera, num plano α, duas retas paralelas r e s. Assinalam-se na reta r, cinco pontos distintos e, na reta s, quatro pontos distintos.

Determina o número de triângulos que podemos definir com os pontos assinalados nas duas retas.

Resolução (pág. 14)

Na dúvida, faz o desenho!

1.3.2 Exercícios de Explicar

Exercício 1.17

Um saco contém várias bolas brancas, várias bolas pretas e várias bolas cinzentas, em que as bolas da mesma cor são iguais.

A expressão seguinte permite determinar o número de maneiras de colocar duas dessas bolas em duas de onze caixas, numeradas de 1 a 11 (cada bola será colocada numa caixa diferente).

$$3 \times {}^{11}C_2 + {}^{3}C_2 \times {}^{11}A_2$$

Explica, no contexto descrito, cada parcela desta expressão.

Resolução (pág. 14)

*O que significa ${}^{n}A_k$? Significa "escolher **E** ordenar". Mais concretamente, significa "em n escolher k **E** ordenar esses k". No fundo, é igual a ${}^{n}C_k \times k!$ (por isso é que não o mencionei até agora!)*

Exercício 1.18

Uma turma do 12.º ano de uma Escola Secundária está a organizar uma viagem de finalistas.

A turma é constituída por catorze raparigas e oito rapazes, que pretendem formar uma comissão organizadora da viagem.

Sabe-se que:

- a comissão terá obrigatoriamente três raparigas e dois rapazes
- o Pedro e a Sandra, irmãos e alunos da turma, não querem fazer parte da comissão em simultâneo

Explica, numa composição, que o número de comissões diferentes que se pode formar é dado por:

$${}^{14}C_3 \times {}^{8}C_2 - {}^{13}C_2 \times 7$$

Resolução (pág. 15)

Explicar a expressão toda? Primeiro, explica cada parcela e, por fim, explica o todo!

Resoluções dos Exercícios

Resolução 1.1

1. "Escolhe a bebida **E** escolhe a sandes **E** escolhe as batatas fritas".
2. $3 \times 4 \times 2 = 24$

Exercício (pág. 3)

Resolução 1.2

1. Pinta a 1.ª divisão **E** pinta a 2.ª divisão **E** pinta a 3.ª divisão **E** pinta a 4.ª divisão.
2. $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4 = 625$.

Exercício (pág. 3)

Resolução 1.3

A lógica é sempre: "Escolhe o 1.º dígito **E** Escolhe o 2.º dígito **E** Escolhe o 3.º dígito **E** Escolhe o 4.º dígito. " (a única coisa que muda é o número de opções):

1. $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$
2. $1 \times 4 \times 4 \times 4 = 64$
3. $1 \times 4 \times 4 \times 2 = 32$
4. $2 \times 4 \times 4 \times 4 = 128$
5. $4 \times 4 \times 1 \times 1 = 16$
6. $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

Exercício (pág. 3)

Resolução 1.4

1. $1 \times 4 \times 4 \times 4 = 64$
2. $1 \times 2 \times 4 \times 4 = 32$
3. 0
4. $64 + 32 + 0 + 0 = 96$

   ("O primeiro dígito é 1 **OU** o primeiro dígito é 2 **OU** o primeiro dígito é 3 **OU** o primeiro dígito é 4.")

Exercício (pág. 4)

Resolução 1.5

$1 \times 3 \times 4 + 1 \times 4 \times 4 + 1 \times 3 \times 4 + 0 = 40$
("O primeiro dígito é 2 **OU** o primeiro dígito é 3 **OU** o primeiro dígito é 5 **OU** o primeiro dígito é 7.")

Exercício (pág. 4)

Resolução 1.6

1. $5! = 120$

   (ordenar 5 pessoas)
2. $1 \times 4! = 24$

   (escolher o condutor **E** ordenar os 4 restantes)
3. $3 \times 4! = 72$

   (escolher o condutor **E** ordenar os 4 restantes)
4. $4 \times 4! = 96$

   (escolher o condutor **E** ordenar os 4 restantes)
5. $2! \times 3! = 12$

   (ordenar os 2 adultos à frente **E** ordenar as 3 crianças atrás)
6. $3 \times 3! \times 2! = 36$

   (escolher o lugar de trás para um adulto se sentar **E** ordenar os 3 adultos nos três "lugares para adultos" **E** ordenar as 2 crianças nos dois "lugares para criança")

Nota: Poderias resolver este exercício sem usar $n!$, mas só usando $\times$ e pensando no "E (quantas opções)?" Por exemplo, ordenar 5 é 5! porque tens 5 opções para o primeiro lugar do carro, 4 opções para o segundo lugar, 3 opções para o terceiro, 2 opções para o quarto e 1 opção para o último lugar (daí o $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$, ou seja, 5!). No fundo, o $n!$ é apenas uma abreviatura.

Exercício (pág. 4)

Resolução 1.7

1. "Dos 5 romances escolhe 2 **E** dos 6 de autoajuda escolhe 3."
2. ${}^5C_2 \times {}^6C_3 = 10 \times 20 = 200.$

Exercício (pág. 5)

Resolução 1.8

1. ${}^7C_4 = 35$

   (Dos 7 amigos escolhe 4)
2. $1 \times {}^6C_3 = 20$

   (Escolhe o José Carlos **E** dos 6 amigos restantes escolhe 3)
3. ${}^3C_2 \times {}^4C_2 = 18$

   (Dos 3 rapazes escolhe 2 **E** das 4 raparigas escolhe 2)
4. ${}^3C_1 \times {}^4C_3 + {}^4C_4 = 13$

   (Dos 3 rapazes escolhe 1 **E** das 4 raparigas escolhe 3 **OU** das 4 raparigas escolhe 4)
5. ${}^3C_1 \times {}^4C_3 + {}^3C_2 \times {}^4C_2 \times + {}^3C_3 \times {}^4C_1 = 12 + 18 + 4 = 34$

   (Dos 3 rapazes escolhe 1 **E** das 4 raparigas escolhe 3 **OU** dos 3 rapazes escolhe 2 **E** das 4 raparigas escolhe 2 **OU** dos 3 rapazes escolhe 3 **E** das 4 raparigas escolhe 1)

Exercício (pág. 5)

Resolução 1.9

1. Todo: ${}^7C_3 = 35$ (das 7 bolas, escolher 3)
2. Contrário: ${}^4C_3 = 4$ (das 4 bolas brancas, escolher 3)
3. Ao todo, subtrai o contrário: ${}^7C_3 - {}^4C_3 = 31$ (o número de maneiras de escolher três bolas, sendo pelo menos uma delas azul, é o mesmo que ao número de maneiras de escolher três bolas de qualquer cor subtrair o contrário, ou seja, o número de maneiras de escolher três bolas brancas)

Exercício (pág. 6)

Resolução 1.10

1. ${}^{10}C_4 \times 4! - {}^5C_4 \times 4! = 4920$

   (Ao todo, subtrais o contrário: o contrário de "ter pelo menos um dígito par" é "ter os quatro dígitos ímpares")
2. ${}^{10}C_4 \times 4! - {}^5C_4 \times 4! = 4920$

   (Ao todo, subtrais o contrário: o contrário de "ter no mínimo um dígito par" é "ter os quatro dígitos ímpares")
3. ${}^{10}C_4 \times 4! - {}^5C_4 \times 4! = 4920$

   (Ao todo, subtrais o contrário: o contrário de "ter no máximo três dígitos pares" é "ter os quatro dígitos pares")
4. ${}^{10}C_4 \times 4! - 1 \times {}^9C_3 \times 4! = 3024$

   (Ao todo, subtrais o contrário: o contrário de "não ter o dígito 9" é "ter o dígito 9")

   Nota: ${}^9C_4 \times 4! = 3024$ também está correto
5. ${}^{10}C_4 \times 4! - \left({}^5C_3 \times 5 \times 4! + {}^5C_4 \times 4!\right) = 3720$

   (Ao todo, subtrais o contrário: o contrário de "ter no máximo dois dígitos pares" é "ter pelo menos três dígitos pares", ou seja, "ter três dígitos pares ou ter quatro dígitos pares")

   Nota: ${}^5C_4 \times 4! + 5 \times {}^5C_3 \times 4! + {}^5C_2 \times {}^5C_2 \times 4! = 3720$ também está correto (porque "ter no máximo dois dígitos pares" é o mesmo que "ter zero dígitos pares ou um dígito par ou dois dígitos pares")

Exercício (pág. 6)

Resolução 1.11

1. 2! (ordena os 2 livros de Matemática dentro da caixa)
2. 5! (ordena os 5 de fora: a caixa e os quatro livros de Português)

3. $2! \times 5! = 240$ no total

   (ordena os 2 livros de Matemática numa caixa **E** ordena os 5 de fora)

Exercício (pág. 7)

Resolução 1.12

1. $2! \times 8! = 80640$

   (Ordena os 2 dirigentes na caixa **E** ordena os 8 de fora.)
2. $2! \times 5! \times 4! = 5760$

   (Ordena os 2 dirigentes numa caixa **E** ordena os 5 atletas noutra caixa **E** ordena os 4 de fora.)
3. $2! \times 5! \times 2! \times 3! = 2880$

   (Ordena os 2 dirigentes numa caixa **E** ordena os 5 atletas noutra caixa **E** ordena os 2 treinadores numa terceira caixa **E** ordena os 3 de fora.)

Exercício (pág. 7)

Resolução 1.13

$2! \times 2! \times 5! = 480$
(Ordena as 2 bolas brancas numa caixa **E** ordena as 2 bolas castanhas noutra caixa
E ordena os 5 de fora)

Exercício (pág. 8)

Resolução 1.14

$6 \times {}^5C_2 \times {}^4C_2 \times 4! \times 3 \times 4!$
(Dos 6 adultos escolher 1 para conduzir o carro preto
E dos 5 adultos restantes escolher 2 para ir no carro preto
E dos 4 jovens escolher 2 para ir no carro preto
E ordenar os 4 passageiros do carro preto
E dos 3 adultos restantes escolher 1 para conduzir o carro cinzento
E ordenar os 4 passageiros do carro cinzento)

Nota: Qualquer outra expressão que também dê 622080 está correta. Por exemplo, ${}^6C_3 \times 3 \times {}^4C_2 \times 4! \times 3 \times 4!$ também está correta, ou então ${}^4C_2 \times {}^6C_3 \times {}^4C_2 \times 2! \times 3! \times {}^4C_2 \times 2! \times 3!$

Exercício (pág. 8)

Resolução 1.15

$1 \times 1 \times {}^4C_2 + 1 \times 1 \times {}^4C_1 + 1 \times 1 \times {}^4C_1 \times {}^3C_1 = 22$
(O primeiro algarismo é “4”
E o último algarismo é “6”
E dos 4 espaços restantes escolher 2 para colocar os algarismos “6”
OU

o primeiro algarismo é “5”
E o último algarismo é “4”
E dos 4 espaços restantes escolher 1 para colocar o algarismo “5”)
OU
o primeiro algarismo é “5”
E o último algarismo é “6”
E dos 4 espaços restantes escolher 1 para colocar o algarismo“5”
E dos 3 espaços restantes escolher 1 para colocar o algarismo “4”)

Nota: Outra alternativa seria $1 \times {}^4C_3 + 1 \times {}^4C_2 \times {}^3C_1 = 22$
(O último algarismo é “4”
E dos 4 espaços do meio escolher 3 para colocar os algarismos “6”
OU
o último algarismo é “6”
E dos 4 espaços do meio escolher 2 para colocar os algarismos “6”
E dos 3 espaços restantes escolher 1 para colocar o algarismo “4”)

Aqui, quando digo “espaços do meio”, refiro-me aos espaços do segundo, terceiro, quarto e quinto algarismos (ou seja, todos os espaços exceto os do primeiro e do último algarismos)

Exercício (pág. 8)

Resolução 1.16

${}^5C_2 \times {}^4C_1 + {}^5C_1 \times {}^4C_2 = 70$
(Dos 5 pontos da reta r escolher 2
E dos 4 pontos da reta s escolher 1
OU
dos 5 pontos da reta r escolher 1
E dos 4 pontos da reta s escolher 2)

Exercício (pág. 8)

Resolução 1.17

- Parcela $3 \times {}^{11}C_2$: é o número de maneiras de escolher uma das três cores e, para cada cor escolhida, colocar duas bolas dessa cor em duas das onze caixas numeradas
- Parcela ${}^3C_2 \times {}^{11}A_2$: é o número de maneiras de escolher duas das três cores e, para cada par de cores escolhidas, colocar duas bolas, uma de cada cor desse par, em duas das onze caixas numeradas.

Nota: Neste caso, como só pede para explicar cada parcela, não precisas de explicar a expressão completa. Se perguntasse para explicar tudo, então poderias terminar dizendo: O número de maneiras de “colocar duas bolas coloridas em duas das onze caixas numeradas” é igual ao número de maneiras de “colocar duas bolas da mesma cor em duas das onze caixas numeradas **OU** colocar duas bolas de cores diferentes em duas das onze caixas numeradas”, ou seja, $3 \times {}^{11}C_2 + {}^3C_2 \times {}^{11}A_2$.

Exercício (pág. 9)

Resolução 1.18

- Parcela ${}^{14}C_3 \times {}^{8}C_2$: é o número de maneiras de escolher três das catorze raparigas e dois dos oito rapazes para formar a comissão
- Parcela ${}^{13}C_2 \times 7$: é o número de maneiras de escolher uma comissão de três raparigas e dois rapazes constituída simultaneamente pelo Pedro e pela Sandra (${}^{13}C_2$ é o número de maneiras de escolher duas das restantes treze raparigas e 7 é o número de maneiras de escolher um dos restantes sete rapazes)
- Expressão ${}^{14}C_3 \times {}^{8}C_2 - {}^{13}C_2 \times 7$: é o número de maneiras de formar uma comissão de três raparigas e dois rapazes não constituída em simultâneo pelo Pedro e pela Sandra (porque"formar um comissão não constituída em simultâneo pelo Pedro e pela Sandra" é o contrário de "formar uma comissão constituída em simultâneo pelo Pedro e pela Sandra", daí fazer-se a diferença entre o todo e o contrário)

Exercício (pág. 9)