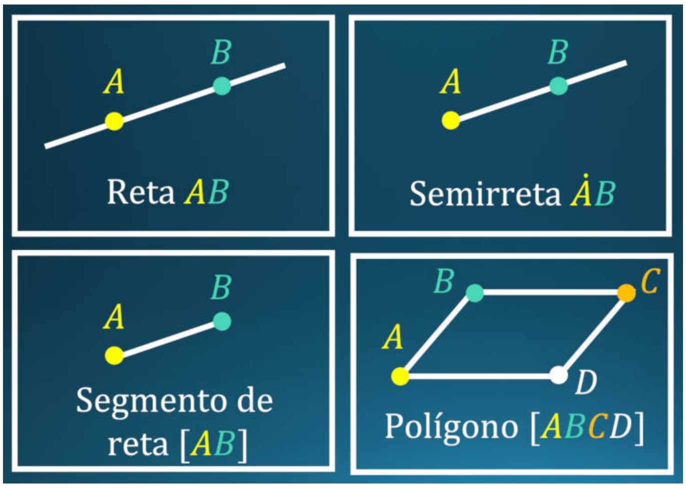
Geometria no Espaço (26 Pontos)

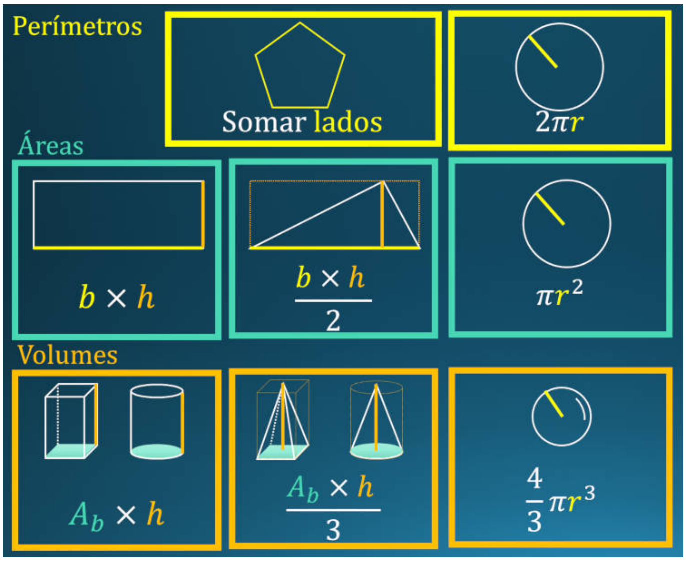
1. Revisão: Fórmulas e Linguagem da Geometria

Este é um excerto do meu livro “**Arrasa no Exame: Matemática A**". Descobre mais sobre o livro, incluindo um vídeo de apresentação, em https://loja.ricardo-ferreira.pt/produto/exame-matematica-a/.

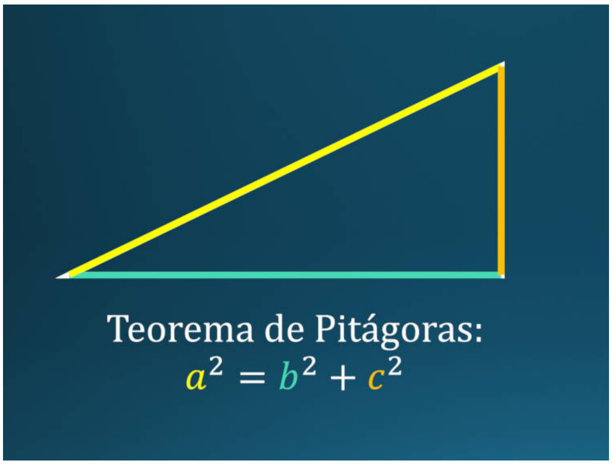
Primeiro de tudo, lembra-te de alguma linguagem:



Além disso, lembra-te sempre dos perímetros, áreas e volumes mais comuns (muitos destes não estão no formulário, mas saem sempre!)



Por fim, claro, não te esqueças talvez da fórmula mais importante de todas: o Teorema de Pitágoras (que só é verdade para triângulos retângulos)!

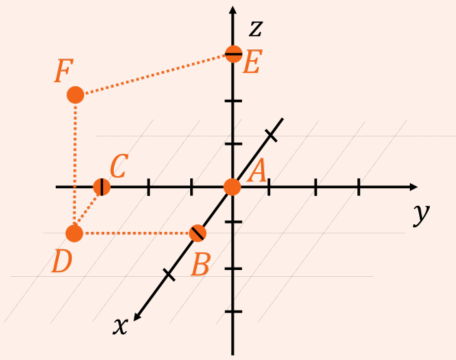


2. Treino: Geometria no Espaço

2.1 Coordenadas

Exercício 2.1

Considera o seguinte referencial o.n, em que cada espaço entre traços vale 1 unidade.



Indica as coordenadas (x,y,z) dos seis pontos presentes na imagem, do A ao F (repara que F tem a mesma cota, ou seja, o mesmo valor de z que o ponto E)

Resolução (pág. 17)

Coordenadas (x,y,z)? x é a posição no eixo dos xx, y é a posição no eixo dos yy e z é a posição no eixo dos zz. (Ou então, se não gostares de dizer x, y e z, podes dizer abcissas, ordenadas e cotas.)

2.2 Ponto Médio: "Média das coordenadas"

Exercício 2.2

Lembrando que o ponto médio M é a média das coordenadas, ou seja, $M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$, determina as coordenadas do ponto médio M dos seguintes pares de pontos.

1. $A(1,2,3)$ e $B(5,6,7)$
2. $A(1,2,3)$ e $B(4,2,0)$
3. $A(1,2,-3)$ e $B(3,-4,-1)$
4. $C(-4,-5,-6)$ e $D(4,5,6)$
5. $B(-4,9,-2)$ e $E(0,-1,-3)$

Resolução (pág. 17)

Coordenadas do ponto médio? É a "média dos dois pontos", ou seja, $\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2}\right)$*!*

2.3 Vetor: "Final menos Inicial"

Exercício 2.3

Lembrando que $\overrightarrow{AB} = B - A$, determina as coordenadas dos seguintes vetores.

1. $\overrightarrow{AB}$, em que $A(1,2,3)$ e $B(4,5,6)$
2. $\overrightarrow{AB}$, em que $A(-1,2,-3)$ e $B(4,5,-6)$
3. $\overrightarrow{BA}$, em que $A(1,2,3)$ e $B(4,5,6)$
4. $\overrightarrow{DC}$, em que $C(-3,0,2)$ e $D(-4,-5,0)$
5. $\overrightarrow{MD}$, em que $D(-1,-1,-1)$ e M é o ponto médio de $A(-3,0,-5)$ e $B(1,-2,7)$

Resolução (pág. 17)

Coordenadas de $\overrightarrow{AB}$*? É "final menos inicial", ou seja,* $B - A$*!*

2.4 Norma: "Pitágoras a 3 dimensões"

Exercício 2.4

Lembrando que $\|(a,b,c)\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$, determina a norma $\|\cdots\|$ dos seguintes vetores.

1. $\vec{v}(2,3,1)$
2. $\vec{v}(-2,3,-1)$
3. $\vec{v}\left(\frac{1}{2},-2,0,\right)$
4. $\overrightarrow{AB}$, em que $A(4,-2,-7)$ e $B(-2,-2,1)$
5. $\overrightarrow{DM}$, em que $D(1,0,-1)$ e M é o ponto médio de $A(-2,3,-5)$ e $B(-6,-5,7)$

Resolução (pág. 18)

Norma? É um comprimento! Como se calcula? "Teorema de Pitágoras a 3 dimensões", ou seja, $\|(a,b,c)\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

2.5 Superfície Esférica: "Centro e Raio"

A superfície esférica é o conjunto de pontos $P(x,y,z)$ tal que a sua distância ao centro $O(a,b,c)$ é igual ao raio r. Matematicamente, esses pontos $P(x,y,z)$ satisfazem a equação $\|\overrightarrow{OP}\| = r$. Elevando ao quadrado, ficamos com a equação reduzida da superfície esférica:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = r^2$$

No fundo, para definir uma superfície esférica, precisas de um centro e de um raio. E se tiveres um centro e tiveres um raio, então consegues escrever a equação da superfície esférica.

Exercício 2.5

Para cada uma das seguintes equações reduzidas de superfície esférica, indica as coordenadas do seu centro O e o seu raio r.

1. $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2 = 5^2$
2. $(x+2)^2+(y+3)^2+(z+4)^2 = 5$
3. $x^2+y^2+z^2 = 7$
4. $(x-1)^2+(y+1)^2+z^2 = 9$
5. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2+\left(z-\frac{3}{4}\right)^2 = 13$

Resolução (pág. 18)

Superfície Esférica? É Centro e Raio! Centro e Raio! CENTRO E RAIO!!! :D

Exercício 2.6

Considera a superfície esférica definida pela equação $(x+3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2 = 4$.

Averigua se os pontos seguintes pertencem à superfície esférica.

1. $A(0,0,0)$
2. $B(-3,-2,1)$
3. $C(-3,-2,3)$
4. $D(-4,-1,2)$
5. $E(-5,-2,1)$

Resolução (pág. 18)

Só pertence à superfície esférica se satisfizer a equação da superfície esférica!

Exercício 2.7

Escreve a equação reduzida da superfície esférica:

1. com centro no ponto $O(3,5,2)$ e raio 4
2. com centro no ponto $O(0,-6,4)$ e diâmetro 10
3. com centro no ponto $O(-3,-4,-2)$ e cujo volume da respetiva esfera é 36π

4. com centro no ponto $O(-1,1,2)$ e que passa no ponto $A(2,0,-3)$
5. em que o segmento de reta $[AB]$ é um diâmetro, para $A(7,-2,3)$ e $B(-1,2,-5)$.

Resolução (pág. 19)

O que queres? Superfície Esférica! O que precisas? Centro e Raio! Como lá chegar? Usa tudo o que sabes! (volumes, ponto médio, norma, ... – e na dúvida, faz o desenho!)

2.6 Reta: "Ponto e Vetor Diretor"

Exercício 2.8

Para cada uma das seguintes equações vetoriais da reta, indica as coordenadas de um dos seus pontos A e de um vetor diretor $\overrightarrow{v}$.

1. $(x,y,z) = (1,2,3) + k(4,5,6),\ k \in \mathbb{R}$
2. $(x,y,z) = (0,0,0) + k(1,1,1),\ k \in \mathbb{R}$
3. $(x,y,z) = (1,2,3) + k(1,2,3),\ k \in \mathbb{R}$
4. $(x,y,z) = (0,-3,5) + k(-4,-1,7),\ k \in \mathbb{R}$

Resolução (pág. 20)

Reta? É Ponto e Vetor Diretor! Ponto e Vetor Diretor! PONTO E VETOR DIRETOR!!! :D

Exercício 2.9

Considera a reta r definida pela equação

$$(x,y,z) = (1,-3,5) + k(6,-1,-2),\ k \in \mathbb{R}$$

Averigua se os pontos seguintes pertencem à reta r.
(na equação, substitui as coordenadas (x,y,z) pelas coordenadas do ponto e tenta descobrir k)

1. $A(1,-3,5)$
2. $B(0,0,0)$
3. $C(7,-4,3)$
4. $D(-5,-2,3)$
5. $E\left(-2,-\frac{5}{2},6\right)$

Resolução (pág. 20)

Só pertence à reta se satisfizer a equação da reta! (ou seja, se houver solução k).

Exercício 2.10

Escreve uma equação vetorial da reta:

1. que passa no ponto $A(0,0,0)$ e que tem vetor diretor $\overrightarrow{v}(2,2,2)$

2. que passa no ponto $A(6,5,4)$ e que tem vetor diretor $\overrightarrow{v}(-3,-2,-1)$
3. que passa nos pontos $A(0,0,0)$ e $B(3,1,-2)$
4. que passa nos pontos $A(4,-1,3)$ e $B(6,0,-2)$

Resolução (pág. 21)

O que queres? Reta! O que precisas? Ponto e Vetor diretor! Como lá chegar? Usa tudo o que sabes!

2.7 Plano: "Ponto e Vetor Normal"

Exercício 2.11

Para cada uma das seguintes equações reduzidas de planos, indica as coordenadas de um vetor normal a esse plano.

1. $2x+3y+4z+5=0$
2. $2x+3y+4z=0$
3. $x-y-2z+7=0$
4. $-y-2z+7=0$
5. $-3x+4z-6=0$
6. $x=0$

Resolução (pág. 22)

Tens equação do plano? Então sabes um vetor normal!

Exercício 2.12

Considera o plano α definido pela equação $2x+5y-3z-12=0$.

Averigua se os pontos seguintes pertencem ao plano α.

1. $A(0,0,0)$
2. $B(2,5,-3)$
3. $C(6,0,0)$
4. $D(1,-1,-5)$

Resolução (pág. 22)

Só pertence ao plano se satisfizer a equação do plano!

Exercício 2.13

De um certo plano α, sabe-se que $A(4,-1,3)$ é um ponto do plano e que $\overrightarrow{n}(2,3,4)$ é um vetor normal a esse plano.

Seguindo os passos seguintes, determina uma equação reduzida do plano α. Escreve a tua resposta na forma $ax+by+cz+d=0$:

1. Primeiro, lembrando que (a,b,c) são as coordenadas do vetor normal, substitui esses três números na equação $ax+by+cz+d=0$.
2. Agora, só te falta descobrir d. Como A é um ponto do plano, então podes substituir x,y,z pelas coordenadas do ponto A na equação $ax+by+cz+d=0$. Fazendo essa substituição e resolvendo a equação, obténs d.
3. Por fim, conclui, escrevendo a equação reduzida do plano α na forma pedida.

Resolução (pág. 23)

Plano? É Ponto e Vetor normal! Ponto e Vetor Normal! PONTO E VETOR NORMAL!!! :D

Exercício 2.14

Escreve, na forma $ax+by+cz+d=0$, uma equação reduzida do plano α, em que:

1. $A(0,0,0)$ é um ponto do plano e $\overrightarrow{n}(-5,2,-3)$ é um vetor normal ao plano
2. $A(3,1,2)$ é um ponto do plano e $\overrightarrow{n}(1,0,-3)$ é um vetor normal ao plano
3. α é o plano mediador de $A(-4,6,5)$ e $B(2,-2,1)$ (ou seja, é o conjunto de pontos que estão à mesma distância de A e de B)
4. α é o plano tangente a uma superfície esférica de centro $O(-3,-1,2)$, no ponto $A(2,5,3)$ (ou seja, é o plano que está "encostado" à superfície esférica, só intersetando a superfície esférica no ponto A)

Resolução (pág. 23)

O que queres? Plano! O que precisas? Ponto e Vetor normal! Como lá chegar? Usa tudo o que sabes! (ponto médio, vetores, norma, ... – e na dúvida, faz o desenho!)
E lembra-te: o plano mediador e o plano tangente à superfíce esférica são planos como os outros – só precisas de ponto e de vetor normal!

2.8 Produto Escalar: "Ângulo a 3 dimensões"

Exercício 2.15

Lembrando que $(u_1,u_2,u_3)\cdot(v_1,v_2,v_3)=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$, calcula o produto escalar dos seguintes vetores.

1. $\overrightarrow{u}(1,2,3)$ e $\overrightarrow{v}(4,5,6)$
2. $\overrightarrow{u}(3,-2,-6)$ e $\overrightarrow{v}(2,-3,2)$
3. $\overrightarrow{u}(0,2,5)$ e $\overrightarrow{v}(-4,-3,0)$
4. $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, em que $A(1,0,-1)$, $B(2,3,2)$ e $C(0,4,-2)$.

Resolução (pág. 25)

Produto escalar? Primeira coordenada de um com a primeira coordenada do outro, mais segunda coordenada de um com a segunda coordenadas do outro, mais terceira coordenada de um com a terceira coordenada do outro.

Exercício 2.16

Calculando o produto escalar dos vetores seguintes, indica se esses vetores são perpendiculares ou não.

1. $\vec{u}(3,2,11)$ e $\vec{v}(2,-3,0)$
2. $\vec{u}(0,0,-1)$ e $\vec{v}(0,0,4)$
3. $\vec{u}(3,-2,5)$ e $\vec{v}(1,-1,-1)$

Resolução (pág. 25)

Vetores perpendiculares? É o mesmo que dizer que o produto escalar é zero!

Exercício 2.17

Lembrando a segunda maneira de calcular o produto escalar

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right)$$

calcula o produto escalar dos seguintes vetores.

1. $\vec{u}$ e $\vec{v}$, em que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$ e $\widehat{\vec{u}, \vec{v}} = 30°$
2. $\vec{u}$ e $\vec{v}$, em que $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 5$ e $\widehat{\vec{u}, \vec{v}} = 90°$
3. $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, em que $[ABC]$ é um triângulo equilátero com lado 4.

Resolução (pág. 26)

Produto escalar – segunda maneira? Norma de um, vezes a norma do outro, vezes o cosseno do ângulo entre eles!

Exercício 2.18

Repara que, se combinares as duas fórmulas do produto escalar, então descobres que

$$\cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$$

Agora, seja $\vec{u}(4,-4,-2)$ e $\vec{v}(0,3,-4)$.

Usando a fórmula acima e seguindo os passos seguintes, calcula a amplitude do ângulo $\widehat{\vec{u}, \vec{v}}$, ou seja, o ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Apresenta a tua resposta em graus, arredondada às unidades. Se em cálculos intermédios, procederes a arredondamentos, conserva, no mínimo, duas casas decimais.

1. Preenche a fórmula acima com todos os dados que sabes e calcula $\cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right)$.
2. Pegando no resultado que obtiveste e fazendo $\cos^{-1}(\cdots)$ ou $\arccos(\cdots)$ na tua calculadora, obtém o valor do ângulo $\widehat{\vec{u}, \vec{v}}$. (Só não te esqueças de por a calculadora em graus!)

Resolução (pág. 26)

Ângulo entre vetores? Basta saberes as coordenadas deles!

Exercício 2.19

Calcula a amplitude dos ângulos seguintes.

Apresenta a tua resposta em graus, arredondada às unidades. Se em cálculos intermédios, procederes a arredondamentos, conserva, no mínimo, duas casas decimais.

1. $\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}$, em que $\overrightarrow{u}(-1,1,-1)$ e $\overrightarrow{v}(-6,3,2)$
2. $\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}$, em que $\overrightarrow{u}(1,4,4)$ e $\overrightarrow{v}(4,1,-2)$
3. $B\hat{A}C$, em que $A(2,-1,-3)$, $B(-1,-1,-2)$ e $C(3,0,-3)$

Resolução (pág. 27)

Ângulo no espaço? Primeiro, combina as fórmulas do produto escalar e descobre o cosseno do ângulo. Por fim, usa o $\cos^{-1}$ *da calculadora! (e não te esqueças se queres a tua resposta em graus ou radianos!)*

2.9 Posição relativa de retas e planos: "Compara os vetores"

Exercício 2.20

Averigua se:

1. as seguintes retas são perpendiculares

$$(x,y,z) = (0,2,4) + k(1,2,-5),\ k \in \mathbb{R}$$
$$(x,y,z) = (1,0,0) + k(3,2,1),\ k \in \mathbb{R}$$

2. os seguintes planos são perpendiculares

$$4x - 7y + 6z - 1 = 0$$
$$-3x + 2z + 4 = 0$$

3. a reta e o plano seguintes são paralelos

$$(x,y,z) = (0,2,4) + k(1,2,-5),\ k \in \mathbb{R}$$
$$5x + 10y + 5z - 8 = 0$$

Resolução (pág. 28)

Comparar retas e planos? É só comparar os seus vetores!

Exercício 2.21

Determina:

1. uma equação vetorial da reta que passa no ponto $A(3,6,9)$ e que é paralela à reta de equação $(x,y,z) = (0,2,4) + k(1,2,-5),\ k \in \mathbb{R}$
2. uma equação vetorial da reta que passa no ponto $B(3,2,1)$ e que é perpendicular ao plano de equação $2x + 3y - 5 = 0$
3. uma equação reduzida do plano que passa no ponto $C(2,-1,-5)$ e que é perpendicular à reta de equação $(x,y,z) = (5,2,-4) + k(3,-1,2),\ k \in \mathbb{R}$.

   Apresenta a tua resposta na forma $ax + by + cz + d = 0$.
4. uma equação reduzida do plano que passa no ponto $D(-2,0,3)$ e que é paralelo ao plano de equação $4x - 3y + 5z + 9 = 0$

   Apresenta a tua resposta na forma $ax + by + cz + d = 0$.

Resolução (pág. 28)

Comparar retas e planos? Faz o desenho! (E lembra-te: uma reta é um ponto e um vetor diretor; um plano é um ponto e um vetor normal!)

2.10 Interseção de retas e planos: "Substitui coordenadas gerais de uma na outra"

Exercício 2.22

Considera a reta r, definida pela equação

$$(x,y,z) = (2,4,-1) + k(3,-5,1),\ k \in \mathbb{R}$$

e o plano α, definido pela equação

$$x + 3y + 4z - 2 = 0$$

Seguindo os passos seguintes, determina as coordenadas do ponto P, que é o ponto de interseção da reta r com o plano α:

1. Primeiro, escreve as coordenadas gerais de qualquer ponto da reta (ou seja, aquelas coordenadas $(\cdots + \cdots k, \cdots + \cdots k, \cdots + \cdots k)$ que vêm da equação da reta).
2. Agora, subsitui essas coordenadas gerais da reta na equação do plano $x + 2y + 3z - 2 = 0$. Resolvendo a equação, obténs k.
3. Por fim, subsituindo k de volta nas coordenadas gerais da reta, obténs as coordenadas do ponto de interseção.

Resolução (pág. 30)

Ponto de Interseção? É um ponto que pertence à reta e ao plano. Ou seja, é um ponto que satisfaz ao mesmo tempo a equação da reta e a equação do plano.

Exercício 2.23

Seja α o plano de equação

$$-x + 3y - 2z + 5 = 0$$

1. Determina as coordenadas do ponto P, que é o ponto de interseção do plano α com a reta r, definida pela equação

$$(x,y,z) = (2,-3,10) + k(4,-1,3),\ k \in \mathbb{R}$$

2. Considera a reta s, perpendicular ao plano α e que passa no ponto $V(2,3,-1)$. Determina as coordenadas do ponto P, que é a interseção da reta s com o plano α.
3. Considera um cone, cuja base está contida no plano α e cujo vértice (ou seja, o "bico" do cone) é o ponto $V(7,-10,5)$. Determina as coordenadas do ponto C, que é o centro da base do cone.
4. Determina as coordenadas do ponto P, que é o ponto do plano α que está mais próximo do ponto $V(-2,0,0)$.

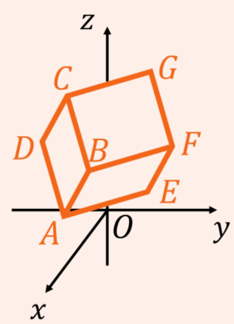
Resolução (pág. 30)

Centro da base do cone ou da pirâmide? Ponto do plano mais próximo? É tudo intersetar o plano com uma reta perpendicular ao plano!

3. Exercícios–Modelo: Geometria no Espaço (26 pontos)

Exercício 3.1

Na figura, está representado, num referencial o. n. $Oxyz$, o cubo $[ABCDEFGH]$ (o ponto H não está representado na figura).



Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(4,1,2)$
- o ponto G tem coordenadas $(2,3,4)$
- a reta AE é definida pela equação $(x,y,z) = (4,1,2) + k(3,-6,2), k \in \mathbb{R}$.

1. Qual das seguintes equações define uma reta perpendicular à reta CG e que passa pelo ponto G?

   (A) $(x,y,z) = (2,3,4) + k(0,1,-3),\ k \in \mathbb{R}$

   (B) $(x,y,z) = (-2,2,8) + k(2,0,-3),\ k \in \mathbb{R}$

   (C) $(x,y,z) = (0,2,4) + k(2,1,0),\ k \in \mathbb{R}$

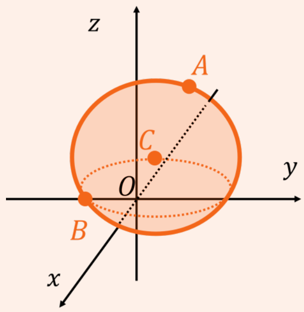
   (D) $(x,y,z) = (0,3,1) + k(2,0,3),\ k \in \mathbb{R}$

2. Determina, sem recorrer à calculadora, a equação reduzida da superfície esférica que passa nos oito vértices do cubo.

Resolução (pág. 33)

Exercício 3.2

Na figura, está representada, num referencial o. n. $Oxyz$, uma superfície esférica, de centro no ponto C e que passa nos pontos A e B.



Sabe-se que:

- essa superfície esférica é definida pela equação
  $(x+2)^2+y^2+(z-1)^2=9$
- o ponto A tem coordenadas $(-3,2,3)$
- o ponto B pertence ao semieixo negativo Oy

1. Qual dos valores seguintes é o valor do ângulo AOC, em graus, arredondado às décimas?

   (A) 30.6° **(B)** 30.7° **(C)** 30.8° **(D)** 30.9°

2. Determina, sem recorrer à calculadora, uma equação do plano tangente a essa superfície esférica no ponto B.

   Apresenta essa equação na forma $ax+by+cz+d=0$.

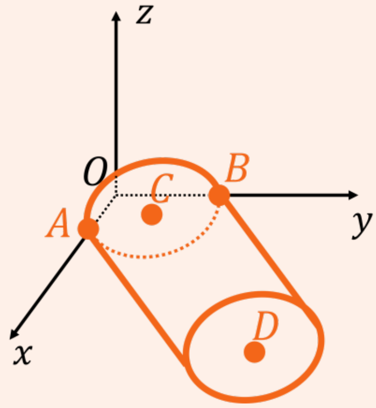
Resolução (pág. 34)

Exercício 3.3

Na figura, está representado, num referencial o. n. $Oxyz$, um cilindro reto.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox e o ponto B pertence ao semieixo positivo Oy
- o segmento de reta $[AB]$ é um diâmetro de uma das bases do cilindro
- o ponto C é o centro da base do cilindro que contém o segmento $[AB]$ e o ponto D é o centro da outra base do cilindro.
- o ponto D tem coordenadas $(5,4,0)$
- a reta CD é definida pela equação
  $(x,y,z)=(5,4,0)+k(2,1,0), k\in\mathbb{R}$
- o volume do cilindro é igual a $10\sqrt{5}\pi$
- a raio da base do cilindro é igual a $\sqrt{5}$



1. Qual das condições seguintes define a superfície esférica de centro no ponto D e que passa no ponto C?

   (A) $(x-5)^2+(y-4)^2+z^2=2\sqrt{5}$

   (B) $(x+5)^2+(y+4)^2+z^2=2\sqrt{5}$

   (C) $(x-5)^2+(y-4)^2+z^2=20$

(D) $(x+5)^2+(y+4)^2+z^2=20$

2. Determina, sem recorrer à calculadora, as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$.

Resolução (pág. 35)

Exercício 3.4

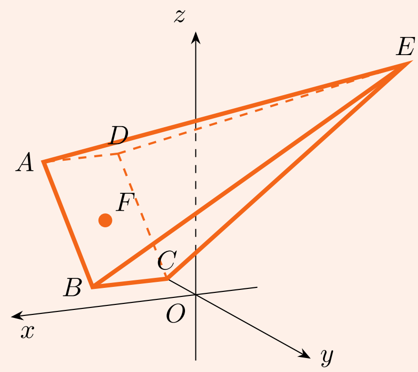
Na figura, está representada, num referencial o. n. $Oxyz$, a pirâmide regular de base quadrada $[ABCD]$ e vértice E.

Na figura, está representado ainda o ponto F, que é o centro da base quadrada $[ABCD]$.

Sabe-se que:

- o ponto E tem coordenadas $(-2,3,4)$
- o plano ABC é definido pela equação

  $3x-4y-3z-4=0$



1. Qual das seguintes equações define um plano perpendicular ao plano ABC e que passa pelo ponto E?

   (A) $-x+3y+2z+19=0$ **(B)** $x+z-2=0$

   (C) $-x-3y+2z-1=0$ **(D)** $3x-4y-3z+30=0$

2. Determina, sem recorrer à calculadora, as coordenadas do ponto F.

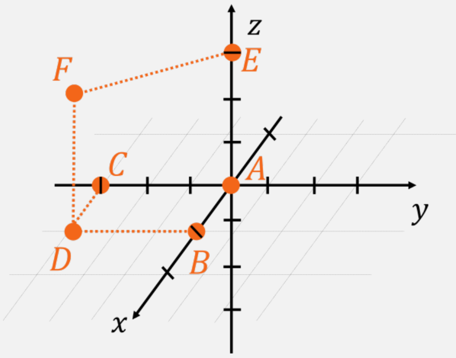
   Dica: O ponto F é o ponto do plano ABC mais próximo de E.

Resolução (pág. 37)

Resoluções dos Exercícios

Resolução 2.1

- $A(0,0,0)$
- $B(1,0,0)$
- $C(0,-3,0)$
- $D(1,-3,0)$
- $E(0,0,3)$
- $F(1,-3,3)$



Exercício (pág. 4)

Resolução 2.2

1. $M = \left(\frac{1+5}{2}, \frac{2+6}{2}, \frac{3+7}{2}\right) = (3,4,5)$
2. $M = \left(\frac{1+4}{2}, \frac{2+2}{2}, \frac{3+0}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, 2, \frac{3}{2}\right)$
3. $M = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{2-4}{2}, \frac{-3-1}{2}\right) = (2,-1,-2)$
4. $M = \left(\frac{-4+4}{2}, \frac{-5+5}{2}, \frac{-6+6}{2}\right) = (0,0,0)$
5. $M = \left(\frac{-4+0}{2}, \frac{9-1}{2}, \frac{-2-3}{2}\right) = \left(-2, 4, -\frac{5}{2}\right)$

Exercício (pág. 4)

Resolução 2.3

1. $\overrightarrow{AB} = B - A = (4,5,6) - (1,2,3) = (4-1, 5-2, 6-3) = (3,3,3)$
2. $\overrightarrow{AB} = B - A = (4,5,-6) - (-1,2,-3) = \big(4-(-1), 5-2, -6-(-3)\big) = (5,3,-3)$
3. $\overrightarrow{BA} = A - B = (1,2,3) - (4,5,6) = (1-4, 2-5, 3-6) = (-3,-3,-3)$
4. $\overrightarrow{DC} = C - D = (-3,0,2) - (-4,-5,0) = \big(-3-(-4), 0-(-5), 2-0\big) = (1,5,2)$
5. $M = \left(\frac{-3+1}{2}, \frac{0-2}{2}, \frac{-5+7}{2}\right) = (-1,-1,1)$, logo

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MD} = D - M &= (-1,-1,-1) - (-1,-1,1)\\ &= \big(-1-(-1), -1-(-1), -1-1\big)\\ &= (0,0,-2)\end{aligned}$$

Exercício (pág. 5)

Resolução 2.4

1. $\|(2,3,1)\| = \sqrt{2^2+3^2+1^2} = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$
2. $\|(-2,3,-1)\| = \sqrt{(-2)^2+3^2+(-1)^2} = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$
3. $\left\|\left(\frac{1}{2},-2,0,\right)\right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+(-2)^2+0^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+4+0} = \sqrt{\frac{17}{4}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$
4. $\overrightarrow{AB} = B-A = (-2,-2,1)-(4,-2,-7) = (-6,0,6)$, logo
$$\|\overrightarrow{AB}\| = \|(-6,0,8)\| = \sqrt{(-6)^2+0^2+8^2} = \sqrt{100} = 10$$
5. $M = \left(\frac{-2-6}{2},\frac{3-5}{2},\frac{-5+7}{2}\right) = (-4,-1,1)$, logo

$\overrightarrow{DM} = M-D = (-4,-1,1)-(1,0,-1) = (-5,-1,2)$, por isso
$$\|\overrightarrow{DM}\| = \|(-5,-1,2)\| = \sqrt{(-5)^2+(-1)^2+2^2} = \sqrt{30}$$

Exercício (pág. 5)

Resolução 2.5

1. $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2 = 5^2 \rightsquigarrow$ centro $(2,3,4)$ e raio 5
2. $(x+2)^2+(y+3)^2+(z+4)^2 = 5 \rightsquigarrow$ centro $(-2,-3,-4)$ e raio $\sqrt{5}$
3. $x^2+y^2+z^2 = 7 \rightsquigarrow$ centro $(0,0,0)$ e raio $\sqrt{7}$
4. $(x-1)^2+(y+1)^2+z^2 = 9 \rightsquigarrow$ centro $(1,-1,0)$ e raio $\sqrt{9} = 3$
5. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2+\left(z-\frac{3}{4}\right)^2 = 13 \rightsquigarrow$ centro $\left(-\frac{1}{2},0,\frac{3}{4}\right)$ e raio $\sqrt{13}$

Exercício (pág. 6)

Resolução 2.6

Equação: $(x+3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2 = 4$

1. $A(0,0,0)$ não pertence:
$$(0+3)^2+(0+2)^2+(0-1)^2 = 9+4+1 = 14 \neq 4$$
2. $B(-3,-2,1)$ não pertence:
$$(-3+3)^2+(-2+2)^2+(1-1)^2 = 0+0+0 = 0 \neq 4$$
3. $C(-3,-2,3)$ pertence:
$$(-3+3)^2+(-2+2)^2+(3-1)^2 = 0+0+4 = 4$$

4. $D(-2,-1,2)$ não pertence:

$$(-4+3)^2+(-1+2)^2+(2-1)^2=1+1+1=3\neq 4$$

5. $E(-5,-2,1)$ pertence:

$$(-5+3)^2+(-2+2)^2+(1-1)^2=4+0+0=4$$

Exercício (pág. 6)

Resolução 2.7

1. Como queremos superfície esférica, então precisamos de centro e raio. Como o centro é $O(3,5,2)$ e o raio 4, então a equação reduzida é

$$(x-3)^2+(y-5)^2+(z-2)^2=4^2,$$

ou seja,

$$(x-3)^2+(y-5)^2+(z-2)^2=16$$

2. Como queremos superfície esférica, então precisamos de centro e raio.

   - Já temos centro: é $O(0,-6,4)$.
   - O raio podemos descobrir: como o diâmetro é 10, então o raio é metade, ou seja, 5.

   Como o centro é $O(0,-6,4)$ e o raio é 5, então a equação reduzida é

$$(x-0)^2+(y-(-6))^2+(z-4)^2=5^2,$$

ou seja,

$$x^2+(y+6)^2+(z-4)^2=25$$

3. Como queremos superfície esférica, então precisamos de centro e raio.

   - Já temos centro, que é $O(-3,-4,-2)$.
   - O raio podemos descobrir: como o volume da esfera é 36π, então podemos usar a fórmula do volume e descobrir que o raio é 3:

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3\Leftrightarrow 36\pi=\frac{4}{3}\pi r^3\Leftrightarrow 27=r^3\Leftrightarrow r=\sqrt[3]{27}\Leftrightarrow r=3$$

   Como o centro é $O(-3,-4,-2)$ e o raio é 3, então a equação reduzida é

$$(x-(-3))^2+(y-(-4))^2+(z-(-2))^2=3^2,$$

ou seja,

$$(x+3)^2+(y+4)^2+(z+2)^2=9$$

4. Como queremos superfície esférica, então precisamos de centro e raio.

   - Já temos centro, que é $O(-1,1,2)$.

- O raio podemos descobrir: como a superfície esférica passa no ponto $A(2,0,-3)$, então o raio é igual a $\|\overrightarrow{OA}\|$. Por isso, vamos calcular $\|\overrightarrow{OA}\|$.
  Como $\overrightarrow{OA} = A - O = (2,0,-3) - (-1,1,2) = (3,-1,-5)$, então

$$r = \|\overrightarrow{OA}\| = \|(3,-1,-5)\| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{35}$$

Como o centro é $O(-1,1,2)$ e o raio é $\sqrt{35}$, então a equação reduzida é

$$(x - (-1))^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = \sqrt{35}^2,$$

ou seja,

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 35$$

5. Como queremos superfície esférica, então precisamos de centro e raio.

- Primeiro, descobrimos o centro. Como $[AB]$ é um diâmetro, então o centro é M, o ponto médio de A e B:

$$M = \left(\frac{7-1}{2}, \frac{-2+2}{2}, \frac{3-5}{2}\right) = (3,0,-1)$$

- Agora, descobrimos o raio. Como M é o centro e A é outro ponto da superfície esférica, então o raio é igual a $\|\overrightarrow{MA}\|$. Por isso, vamos calcular $\|\overrightarrow{MA}\|$.
  Como $\overrightarrow{MA} = A - M = (7,-2,3) - (3,0,-1) = (4,-2,4)$, então

$$r = \|\overrightarrow{MA}\| = \|(4,-2,4)\| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$$

Como o centro é $O(3,0,-1)$ e o raio é 6, então a equação reduzida é

$$(x-3)^2 + (y-0)^2 + (z-(-1))^2 = 6^2,$$

ou seja,

$$(x-3)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 36$$

Exercício (pág. 6)

Resolução 2.8

1. $(x,y,z) = (1,2,3) + k(4,5,6),\ k \in \mathbb{R} \rightsquigarrow$ ponto $(1,2,3)$ e vetor diretor $(4,5,6)$
2. $(x,y,z) = (0,0,0) + k(1,1,1),\ k \in \mathbb{R} \rightsquigarrow$ ponto $(0,0,0)$ e vetor diretor $(1,1,1)$
3. $(x,y,z) = (1,2,3) + k(1,2,3),\ k \in \mathbb{R} \rightsquigarrow$ ponto $(1,2,3)$ e vetor diretor $(1,2,3)$
4. $(x,y,z) = (0,-3,5) + k(-4,-1,7),\ k \in \mathbb{R} \rightsquigarrow$ ponto $(0,-3,5)$ e vetor diretor $(-4,-1,7)$

Exercício (pág. 7)

Resolução 2.9

Equação: $(x,y,z) = (1,-3,5) + k(6,-1,-2),\ k \in \mathbb{R}$

1. $A(1,-3,5)$ pertence:

$$
\begin{aligned}
&(1,-3,5)=(1,-3,5)+k(6,-1,-2)\\
&\Leftrightarrow (1,-3,5)=(1+6k,-3-k,5-2k)\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}1=1+6k\\-3=-3-k\\5=5-2k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=0\\k=0\\k=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow k=0
\end{aligned}
$$

2. $B(0,0,0)$ não pertence:

$$(0,0,0)=(1,-3,5)+k(6,-1,-2) \Leftrightarrow \begin{cases}0=1+6k\\0=-3-k\\0=5-2k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=-\frac{1}{6}\\k=-3\\k=\frac{5}{2}\end{cases}$$

3. $C(7,-4,3)$ pertence:

$$(7,-4,3)=(1,-3,5)+k(6,-1,-2) \Leftrightarrow \begin{cases}7=1+6k\\-4=-3-k\\3=5-2k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=1\\k=1\\k=1\end{cases} \Leftrightarrow k=1$$

4. $D(-5,-2,3)$ não pertence:

$$(-5,-2,3)=(1,-3,5)+k(6,-1,-2) \Leftrightarrow \begin{cases}-5=1+6k\\-2=-3-k\\3=5-2k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=-1\\k=-1\\k=1\end{cases}$$

5. $E=\left(-2,-\frac{5}{2},6\right)$ pertence:

$$\left(-2,-\frac{5}{2},6\right)=(1,-3,5)+k(6,-1,-2) \Leftrightarrow \begin{cases}-2=1+6k\\-\frac{5}{2}=-3-k\\6=5-2k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=-\frac{1}{2}\\k=-\frac{1}{2}\\k=-\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow k=-\frac{1}{2}$$

Exercício (pág. 7)

Resolução 2.10

1. Como queremos reta, então precisamos de ponto e vetor diretor.

   Como um ponto é $A(0,0,0)$ e um vetor diretor é $\overrightarrow{v}(2,2,2)$, então uma equação vetorial é

$$(x,y,z)=(0,0,0)+k(2,2,2),\ k\in\mathbb{R}$$

2. Como queremos reta, então precisamos de ponto e vetor diretor.

   Como um ponto é $A(6,5,4)$ e um vetor diretor é $\overrightarrow{v}(-3,-2,-1)$, então uma equação vetorial é
$$(x,y,z) = (6,5,4) + k(-3,-2,-1),\ k \in \mathbb{R}$$

3. Como queremos reta, então precisamos de ponto e vetor diretor.

   - Já temos ponto: é, por exemplo, $A(0,0,0)$.
   - Vetor diretor não temos, mas podemos descobrir: é, por exemplo, $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (3,1,-2) - (0,0,0) = (3,1,-2)$$

   Como um ponto é $A(0,0,0)$ e um vetor diretor é $\overrightarrow{AB}(3,1,-2)$, então uma equação vetorial é
$$(x,y,z) = (0,0,0) + k(3,1,-2),\ k \in \mathbb{R}$$

4. Como queremos reta, então precisamos de ponto e vetor diretor.

   - Já temos ponto: é, por exemplo, $A(4,-1,3)$.
   - Vetor diretor não temos, mas podemos descobrir: é, por exemplo, $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (6,0,-2) - (4,-1,3) = (2,1,-5)$$

   Como um ponto é $A(4,-1,3)$ e um vetor diretor é $\overrightarrow{AB}(2,1,-5)$, então uma equação vetorial é
$$(x,y,z) = (4,-1,3) + k(2,1,-5),\ k \in \mathbb{R}$$

Exercício (pág. 7)

Resolução 2.11

1. $2x+3y+4z+5=0 \rightsquigarrow$ vetor normal $(2,3,4)$
2. $2x+3y+4z=0 \rightsquigarrow$ vetor normal $(2,3,4)$
3. $x-y-2z+7=0 \rightsquigarrow$ vetor normal $(1,-1,-2)$
4. $-y-2z+7=0 \rightsquigarrow$ vetor normal $(0,-1,-2)$
5. $-3x+4z-6=0 \rightsquigarrow$ vetor normal $(-3,0,4)$
6. $x=0 \rightsquigarrow$ vetor normal $(1,0,0)$

Exercício (pág. 8)

Resolução 2.12

Equação: $2x+5y-3z-12=0$

1. $A(0,0,0)$ não pertence:

$$2\times 0 + 5\times 0 - 3\times 0 - 12 = 0+0+0-12 = -12 \neq 0$$

2. $B(2,5,-3)$ não pertence:

$$2\times 2+5\times 5-3\times(-3)-12=4+25+9-12=26\neq 0$$

3. $C(6,0,0)$ pertence:

$$2\times 6+5\times 0-3\times 0-12=12+0+0-12=0$$

4. $D(1,-1,-5)$ pertence:

$$2\times 1+5\times(-1)-3\times(-5)-12=2-5+15-12=0$$

Exercício (pág. 8)

Resolução 2.13

Como queremos plano, então precisamos de ponto e vetor normal.

1. Como $\overrightarrow{n}(2,3,4)$ é um vetor normal, então já sabemos que a nossa equação é

$$2x+3y+4z+d=0$$

2. Como $A(4,-1,3)$ é um ponto do plano, então satisfaz a equação $2x+3y+4z+d=0$, ou seja,

$$2\times 4+3\times(-1)+4\times 3+d=0\Leftrightarrow 8-3+12+d=0\Leftrightarrow d=-17$$

3. Concluímos então que uma equação reduzida do plano α é

$$2x+3y+4z-17=0$$

Exercício (pág. 8)

Resolução 2.14

1. Como queremos plano, então precisamos de ponto e vetor normal.
   - Como $\overrightarrow{n}(-5,2,-3)$ é um vetor normal, então já sabemos que a nossa equação é
   $$-5x+2y-3z+d=0$$
   - Como $A(0,0,0)$ é um ponto do plano, então satisfaz a equação $-5x+2y-3z+d=0$, ou seja,
   $$-5\times 0+2\times 0-3\times 0+d=0\Leftrightarrow d=0$$
   - Concluímos então que uma equação reduzida do plano α é
   $$-5x+2y-3z=0$$
2. Como queremos plano, então precisamos de ponto e vetor normal.

- Como $\overrightarrow{n}(1,0,-3)$ é um vetor normal, então já sabemos que a nossa equação é

$$1x+0y-3z+d=0,$$

ou seja,

$$x-3z+d=0$$

- Como $A(3,1,2)$ é um ponto do plano, então satisfaz a equação $x-3z+d=0$, ou seja,

$$3-3\times 2+d=0 \Leftrightarrow 3-6+d=0 \Leftrightarrow d=3$$

- Concluímos então que uma equação reduzida do plano α é

$$x-3z+3=0$$

3. Como queremos plano, então precisamos de ponto e vetor normal.

- Ora, se é um plano mediador, então um ponto do plano é o ponto médio de A e B, a que chamamos M:

$$M=\left(\frac{-4+2}{2},\frac{6-2}{2},\frac{5+1}{2}\right)=(-1,2,3)$$

- E se é um plano mediador, então é perpendicular à reta MB, ou seja, um vetor normal, é, por exemplo, $\overrightarrow{MB}$:

$$\overrightarrow{MB}=B-M=(2,-2,1)-(-1,2,3)=(3,-4,-2)$$

Agora que já temos ponto e vetor normal, é fazer como sempre.

- Como $\overrightarrow{MB}(3,-4,-2)$ é um vetor normal, então já sabemos que a nossa equação é

$$3x-4y-2z+d=0$$

- Como $M(-1,2,3)$ é um ponto do plano, então satisfaz a equação $3x-4y-2z+d=0$, ou seja,

$$3\times(-1)-4\times 2-2\times 3+d=0 \Leftrightarrow -3-8-6+d=0 \Leftrightarrow d=17$$

- Concluímos então que uma equação reduzida do plano α é

$$3x-4y-2z+17=0$$

Nota: Outros possíveis vetores normais seriam $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$.

4. Como queremos plano, então precisamos de ponto e vetor normal.

- Ora, se é um plano tangente à superfície esférica no ponto A, então um ponto do plano é o ponto $A(2,5,3)$.
- E se é um plano tangente à superfície esférica em A, então esse plano é perpendicular ao raio $[AO]$, ou seja, um vetor normal é, por exemplo, $\overrightarrow{AO}$:

$$\overrightarrow{AO}=O-A=(-3,-1,2)-(2,5,3)=(-5,-6,-1)$$

Agora que já temos ponto e vetor normal, é fazer como sempre.

- Como $\overrightarrow{AO}(-5,-6,-1)$ é um vetor normal, então já sabemos que a nossa equação é
$$-5x-6y-1z+d=0$$
ou seja,
$$-5x-6y-z+d=0$$
- Como $A(2,5,3)$ é um ponto do plano, então satisfaz a equação $-5x-6y-z+d=0$, ou seja,
$$-5\times 2-6\times 5-3+d=0 \Leftrightarrow -10-30-3+d=0 \Leftrightarrow d=43$$
- Concluímos então que uma equação reduzida do plano α é
$$-5x-6y-z+43=0$$

Exercício (pág. 9)

Resolução 2.15

1. $\vec{u}\cdot\vec{v}=(1,2,3)\cdot(4,5,6)=1\times 4+2\times 5+3\times 6=32$
2. $\vec{u}\cdot\vec{v}=(3,-2,-6)\cdot(2,-3,2)=3\times 2+(-2)\times(-3)+(-6)\times 2=0$
3. $\vec{u}\cdot\vec{v}=(0,2,5)\cdot(-4,-3,0)=0\times(-4)+2\times(-3)+5\times 0=-6$
4. Para calcular o produto escalar $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, precisamos das coordenadas dos dois vetores. Calculamos então essas coordenadas.
$$\overrightarrow{AB}=B-A=(2,3,2)-(1,0,-1)=(1,3,3)$$
$$\overrightarrow{AC}=C-A=(0,4,-2)-(1,0,-1)=(-1,4,-1)$$
E agora que já temos as coordenadas dos vetores, podemos sim calcular o seu produto escalar.
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(1,3,3)\cdot(-1,4,-1)=1\times(-1)+3\times 4+3\times(-1)=8$$

Exercício (pág. 9)

Resolução 2.16

1. $\vec{u}(3,2,11)$ e $\vec{v}(2,-3,0)$ são perpendiculares porque o seu produto escalar é zero:
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(3,2,11)\cdot(2,-3,0)=3\times 2+2\times(-3)+11\times 0=0$$
2. $\vec{u}(0,0,-1)$ e $\vec{v}(0,0,4)$ não são perpendiculares porque o seu produto escalar não é zero:
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(0,0,-1)\cdot(0,0,4)=0\times 0+0\times 0+(-1)\times 4=-4\neq 0$$
3. $\vec{u}(3,-2,5)$ e $\vec{v}(1,-1,-1)$ são perpendiculares porque o seu produto escalar é zero:
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(3,-2,5)\cdot(1,-1,-1)=3\times 1+(-2)\times(-1)+5\times(-1)=0$$

Exercício (pág. 10)

Resolução 2.17

1. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\| \cos\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) = 3 \times 4 \times \cos(30^\circ) = 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$
2. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\| \cos\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) = 2 \times 5 \times \cos(90^\circ) = 10 \times 0 = 0$
3. Para calcular o produto escalar $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ pela segunda maneira, precisamos das normas e do ângulo entre eles.

   Como $[AB]$ e $[AC]$ são os lados de um triângulo equilátero de lado 4, então as normas são 4 e o ângulo entre eles $B\hat{A}C$ é 60°. Podemos então calcular o produto escalar.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\| \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) = 4 \times 4 \times \cos(60^\circ) = 16 \times \frac{1}{2} = 8$$

Nota: O ângulo $B\hat{A}C$ tem 60°, porque a soma dos três ângulos internos de um triângulo é sempre 180°. Além disso, como temos um triângulo equilátero, então os ângulos são todos iguais, ou seja, têm $180^\circ/3 = 60^\circ$ cada um.

Exercício (pág. 10)

Resolução 2.18

1. Primeiro, subsituimos na fórmula combinada para descobrir o cosseno do ângulo.

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|} = \frac{4 \times 0 - 4 \times 3 - 2 \times (-4)}{\sqrt{4^2 + (-4)^2 + (-2)^2}\sqrt{0^2 + 3^2 + (-4)^2}}$$
$$= \frac{-4}{\sqrt{36}\sqrt{25}} = \frac{-4}{6 \times 5} = \frac{-2}{15}$$

2. E agora que já temos $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) = \cdots$, é só fazer $\cos^{-1}(\cdots)$ ou $\arccos(\cdots)$ na calculadora para descobrir o ângulo (isto claro, garantindo que a máquina está em graus).

$$\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}} = \cos^{-1}\left(\frac{-2}{15}\right) \approx 97.66^\circ \approx 98^\circ$$

Nota: Nas calculadoras, $\cos^{-1}$, não é $\frac{1}{\cos}$, mas é sim a inversa do cosseno. Ou seja, é aquela coisa em que se lhe deres um cosseno, então ela dá-te o ângulo de volta.

Exercício (pág. 10)

Resolução 2.19

1. • Primeiro, combina as fórmulas do produto escalar e descobre o cosseno do ângulo.

$$
\begin{aligned}
\cos\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) &= \frac{(-1,1,-1)\cdot(-6,3,2)}{\|(-1,1,-1)\|\|(-6,3,2)\|} \\
&= \frac{-1\times(-6)+1\times 3+(-1)\times 2}{\sqrt{(-1)^2+1^2+(-1)^2}\sqrt{(-6)^2+3^2+2^2}} \\
&= \frac{7}{\sqrt{3}\sqrt{49}} = \frac{7}{7\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

• E agora, é só fazer $\cos^{-1}(\cdots)$ na calculadora para descobrires o ângulo.

$$\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}} = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 54.74^\circ \approx 55^\circ$$

2. • Primeiro, combina as fórmulas do produto escalar e descobre o cosseno do ângulo.

$$
\begin{aligned}
\cos\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) &= \frac{(1,4,4)\cdot(4,1,-2)}{\|(1,4,4)\|\|(4,1,-2)\|} \\
&= \frac{1\times 4+4\times 1+4\times(-2)}{\sqrt{1^2+4^2+4^2}\sqrt{4^2+1^2+(-2)^2}} \\
&= \frac{0}{\sqrt{33}\sqrt{21}} = 0
\end{aligned}
$$

• E agora, é só fazer $\cos^{-1}(\cdots)$ na calculadora para descobrires o ângulo.

$$\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}} = \cos^{-1}(0) = 90^\circ$$

> **Nota:** Neste caso, nem precisavas de usar a calculadora, porque se $\cos(\cdots) = 0$, então sabes logo que $\cdots = 90^\circ$.

3. $B\widehat{A}C$ é a mesma coisa que $\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}$. Antes de aplicarmos a fórmula combinada, temos primeiro de descobrir as coordenadas destes vetores.

$$
\begin{aligned}
AB &= B - A = (-1,-1,-2) - (2,-1,-3) = (-3,0,1) \\
AC &= C - A = (3,0,-3) - (2,-1,-3) = (1,1,0)
\end{aligned}
$$

Agora, é como de costume.

• Primeiro, combina as fórmulas do produto escalar e descobre o cosseno do ângulo.

$$
\begin{aligned}
\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) &= \frac{(-3,0,1)\cdot(1,1,0)}{\|(-3,0,1)\|\|(1,1,0)\|} \\
&= \frac{-3\times 1+0\times 1+1\times 0}{\sqrt{(-3)^2+0^2+1^2)}\sqrt{1^2+1^2+0^2}} \\
&= \frac{-3}{\sqrt{10}\sqrt{2}} = -\frac{3}{\sqrt{20}}
\end{aligned}
$$

• E agora, é só fazer $\cos^{-1}(\cdots)$ na calculadora para descobrires o ângulo.

$$\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}} = \cos^{-1}\left(-\frac{3}{\sqrt{20}}\right) \approx 132.13^\circ \approx 132^\circ$$

Exercício (pág. 11)

Resolução 2.20

1. Retas perpendiculares têm vetores diretores perpendiculares (pensa no desenho!)

   Por isso, para ver se as retas são perpendiculares, basta ver se os vetores diretores são perpendiculares, fazendo o seu produto escalar:

   $$(1,2,-5)\cdot(3,2,1) = 1\times 3 + 2\times 2 + (-5)\times 1 = 2 \neq 0$$

   Como o produto escalar não é zero, então os vetores diretores não são perpendiculares e, por isso, **as retas não são perpendiculares.**

2. Planos perpendiculares têm vetores normais perpendiculares (pensa no desenho!)

   Por isso, para ver se os planos são perpendiculares, basta ver se os vetores normais são perpendiculares, fazendo o seu produto escalar:

   $$(4,-7,6)\cdot(-3,0,2) = 4\times(-3) + (-7)\times 0 + 6\times 2 = 0$$

   Como o produto escalar é zero, então os vetores normais são perpendiculares e, por isso, **os planos são perpendiculares.**

3. Se uma reta e um plano são paralelos, então os seus vetores são perpendiculares (pensa no desenho!)

   Por isso, para ver se a reta e o plano são paralelos, basta ver se os vetores são perpendiculares, fazendo o seu produto escalar:

   $$(1,2,-5)\cdot(5,10,5) = 1\times 5 + 2\times 10 + (-5)\times 5 = 0$$

   Como o produto escalar é zero, então os vetores são perpendiculares e, por isso, **a reta e o plano são paralelos.**

Exercício (pág. 11)

Resolução 2.21

1. Como queremos reta, então precisamos de ponto e vetor diretor.

   - Ponto já temos: é $A(3,6,9)$.
   - Vetor diretor não temos, mas podemos descobrir. Como a reta é paralela à reta $(x,y,z) = (0,2,4) + k(1,2,-5),,\ k\in\mathbb{R}$, então podemos usar o mesmo vetor diretor $(1,2,-5)$ (pensa no desenho!)

   Como um ponto é $A(3,6,9)$ e um vetor diretor é $(1,2,-5)$, então uma equação vetorial da reta é

   $$(x,y,z) = (3,6,9) + k(1,2,-5),\ k\in\mathbb{R}$$

2. Como queremos reta, então precisamos de ponto e vetor diretor.

   - Ponto já temos: é $B(3,2,1)$.

- Vetor diretor não temos, mas podemos descobrir. Como a reta é perpendicular ao plano $2x+3y-5=0$, então podemos usar o vetor normal ao plano $(2,3,0)$ como vetor diretor da reta (pensa no desenho!)

Como um ponto é $A(3,2,1)$ e um vetor diretor é $(2,3,0)$, então uma equação vetorial da reta é

$$(x,y,z)=(3,2,1)+k(2,3,0),\ k\in\mathbb{R}$$

3. Como queremos plano, então precisamos de ponto e vetor normal.

- Ponto já temos: é $C(2,-1,-5)$.
- Vetor diretor não temos, mas podemos descobrir. Como o plano é perpendicular à reta $(x,y,z)=(5,2,-4)+k(3,-1,2),,\ k\in\mathbb{R}$, então podemos usar o vetor diretor da reta $(3,-1,2)$ como vetor normal ao plano (pensa no desenho!)

Agora que já temos ponto e vetor normal, é só definir o plano como sempre.

- Como $(3,-1,2)$ é um vetor normal, então já sabemos que a nossa equação é

$$3x-1y+2z+d=0,$$

ou seja,

$$3x-y+2z+d=0$$

- Como $C(2,-1,-5)$ é um ponto do plano, então satisfaz a equação do plano $3x-y+2z+d=0$, ou seja,

$$3\times 2-(-1)+2\times(-5)+d=0\Leftrightarrow 6+1-10+d=0\Leftrightarrow d=3$$

- Como $d=3$, concluímos então que uma equação reduzida do plano é

$$3x-y+2z+3=0$$

4. Como queremos plano, então precisamos de ponto e vetor normal.

- Ponto já temos: é $D(-2,0,3)$.
- Vetor diretor não temos, mas podemos descobrir. Como o plano é paralelo ao plano $4x-3y+5z+9=0$, então podemos usar o mesmo vetor normal $(4,-3,5)$ (pensa no desenho!)

Agora que já temos ponto e vetor normal, é só definir o plano como sempre.

- Como $(4,-3,5)$ é um vetor normal, então já sabemos que a nossa equação é

$$4x-3y+5z+d=0.$$

- Como $D(-2,0,3)$ é um ponto do plano, então satisfaz a equação do plano$4x-3y+5z+d=0$, ou seja,

$$4\times(-2)-3\times 0+5\times 3+d=0\Leftrightarrow -8+0+15+d=0\Leftrightarrow d=-7$$

- Como $d=-7$, concluímos então que uma equação reduzida do plano é

$$4x-3y+5z-7=0$$

Nota: Em todas estas alíneas, em vez de usares exatamente o mesmo vetor, poderias usar um múltiplo qualquer desse vetor. Por exemplo, em vez de usares $(1,0,-1)$, podias usar $(2,0,-2)$ ou $\left(-\frac{1}{3},0,\frac{1}{3}\right)$.

Exercício (pág. 11)

Resolução 2.22

1. Como a equação da reta é

$$(x,y,z) = (2,4,-1) + k(3,-5,1),\ k \in \mathbb{R},$$

então as coordenadas gerais de qualquer ponto da reta são

$$(2+3k, 4-5k, -1+k)$$

2. Como $P(2+3k, 4-5k, -1+k)$ também pertence ao plano, então também satisfaz a equação do plano $x+3y+4z-2=0$, ou seja,

$$\begin{aligned} &2+3k+3\times(4-5k)+4\times(-1+k)-2=0 \\ \Leftrightarrow &2+3k+12-15k-4+4k-2=0 \\ \Leftrightarrow &8-8k=0 \\ \Leftrightarrow &k=1 \end{aligned}$$

3. Como $k=1$, então já sabemos as coordenadas de P:

$$P = (2+3k, 4-5k, -1+k) = (2+3\times 1, 4-5\times 1, -1+1) = (5,-1,0)$$

Exercício (pág. 12)

Resolução 2.23

1. Queremos P, o ponto de interseção entre uma reta e um plano (é sempre a mesma coisa):
   - Primeiro, descobrimos as coordenadas gerais de qualquer ponto da reta. Como a equação da reta é

   $$(x,y,z) = (2,-3,10) + k(4,-1,3),\ k \in \mathbb{R},$$

   então as coordenadas gerais de qualquer ponto da reta são

   $$(2+4k, -3-k, 10+3k)$$

   - Depois, substituímos na equação do plano para descobrir k. Como $P(2+4k, -3-k, 10+3k)$ também pertence ao plano, então também satisfaz a equação do plano $-x+3y-2z+5=0$, ou seja,

   $$\begin{aligned} &-(2+4k)+3\times(-3-k)-2\times(10+3k)+5=0 \\ \Leftrightarrow &-2-4k-9-3k-20-6k+5=0 \\ \Leftrightarrow &-26-13k=0 \\ \Leftrightarrow &k=-2 \end{aligned}$$

- Como $k=-2$, então já sabemos as coordenadas de P:

$$\begin{aligned} P &= (2+4k,-3-k,10+3k) \\ &= (2+4\times(-2),-3-(-2),10+3\times(-2)) \\ &= (-6,-1,4) \end{aligned}$$

2. Queremos P, o ponto de interseção entre uma reta e um plano (é sempre a mesma coisa):

- Primeiro, descobrimos as coordenadas gerais de qualquer ponto da reta. Desta vez, não temos a equação da reta, mas podemos descobri-la: basta saber um ponto e um vetor diretor.
  - Ponto, já temos: é $V(2,3,-1)$
  - Vetor diretor não temos, mas sabemos que a reta é perpendicular ao plano α. Por isso, um possível vetor diretor é o vetor normal ao plano α, ou seja, $(-1,3,-2)$

  Como $V(2,3,-1)$ é um ponto e $(-1,3,-2)$ é um vetor diretor, então uma equação da reta é

$$(x,y,z)=(2,3,-1)+k(-1,3,-2),\ k\in\mathbb{R}.$$

  Por isso, as coordenadas gerais de qualquer ponto da reta são

$$(2-k,3+3k,-1-2k)$$

- Depois, substituímos na equação do plano para descobrir k. Como $P(2-k,3+3k,-1-2k)$ também pertence ao plano, então também satisfaz a equação do plano $-x+3y-2z+5=0$, ou seja,

$$\begin{aligned} &-(2-k)+3\times(3+3k)-2\times(-1-2k)+5=0 \\ \Leftrightarrow &-2+k+9+9k+2+4k+5=0 \\ \Leftrightarrow &14+14k=0 \\ \Leftrightarrow &k=-1 \end{aligned}$$

- Como $k=-1$, então já sabemos as coordenadas de P:

$$\begin{aligned} P &= (2-k,3+3k,-1-2k) \\ &= (2-(-1),3+3\times(-1),-1-2\times(-1)) \\ &= (3,0,1) \end{aligned}$$

3. Queremos C, o centro da base do cone. Repara que C é o ponto de interseção entre o plano α (que contém a base do cone) e a reta perpendicular à base do cone e que passa pelo vértice $V(7,-10,5)$.

No fundo, queremos C, que é o ponto de interseção entre uma reta e um plano (é sempre a mesma coisa):

- Primeiro, descobrimos as coordenadas gerais de qualquer ponto da reta. Desta vez, não temos a equação da reta, mas podemos descobri-la: basta saber um ponto e um vetor diretor.
  - Ponto, já temos: é $V(7,-10,5)$

- ◦ Vetor diretor não temos, mas sabemos que a reta é perpendicular ao plano α. Por isso, um possível vetor diretor é o vetor normal ao plano α, ou seja, $(-1,3,-2)$

  Como $V(7,-10,5)$ é um ponto e $(-1,3,-2)$ é um vetor diretor, então uma equação da reta é

  $$(x,y,z) = (7,-10,5) + k(-1,3,-2),\ k \in \mathbb{R}.$$

  Por isso, as coordenadas gerais de qualquer ponto da reta são

  $$(7-k,-10+3k,5-2k)$$

- Depois, substituímos na equação do plano para descobrir k. Como $C(7-k,-10+3k,5-2k)$ também pertence ao plano, então também satisfaz a equação do plano $-x+3y-2z+5=0$, ou seja,

  $$\begin{aligned} &-(7-k)+3\times(-10+3k)-2\times(5-2k)+5=0 \\ \Leftrightarrow &-7+k-30+9k-10+4k+5=0 \\ \Leftrightarrow &14k-42=0 \\ \Leftrightarrow &k=3 \end{aligned}$$

- Como $k=3$, então já sabemos as coordenadas de C:

  $$\begin{aligned} C &= (7-k,-10+3k,5-2k) \\ &= (7-3,-10+3\times 3,5-2\times 3) \\ &= (4,-1,-1) \end{aligned}$$

4. Queremos P, o ponto do plano α mais próximo de $V(-2,0,0)$. Repara que P é o ponto de interseção entre o plano α e a reta perpendicular a α e que passa pelo ponto $V(-2,0,0)$.

No fundo, queremos P, que é o ponto de interseção entre uma reta e um plano (é sempre a mesma coisa):

- Primeiro, descobrimos as coordenadas gerais de qualquer ponto da reta. Desta vez, não temos a equação da reta, mas podemos descobri-la: basta saber um ponto e um vetor diretor.
  - ◦ Ponto, já temos: é $V(-2,0,0)$
  - ◦ Vetor diretor não temos, mas sabemos que a reta é perpendicular ao plano α. Por isso, um possível vetor diretor é o vetor normal ao plano α, ou seja, $(-1,3,-2)$

  Como $V(-2,0,0)$ é um ponto e $(-1,3,-2)$ é um vetor diretor, então uma equação da reta é

  $$(x,y,z) = (-2,0,0) + k(-1,3,-2),\ k \in \mathbb{R}.$$

  Por isso, as coordenadas gerais de qualquer ponto da reta são

  $$(-2-k,3k,-2k)$$

- Depois, substituímos na equação do plano para descobrir k. Como $P(-2-k, 3k, -2k)$ também pertence ao plano, então também satisfaz a equação do plano $-x+3y-2z+5=0$, ou seja,

$$\begin{aligned}
&-(-2-k)+3\times 3k-2\times(-2k)+5=0\\
\Leftrightarrow &2+k+9k+4k+5=0\\
\Leftrightarrow &7+14k=0\\
\Leftrightarrow &k=-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

- Como $k=-\frac{1}{2}$, então já sabemos as coordenadas de P:

$$\begin{aligned}
P&=(-2-k, 3k, -2k)\\
&=\left(-2-\left(-\frac{1}{2}\right), 3\times\left(-\frac{1}{2}\right), -2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\\
&=\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 1\right)
\end{aligned}$$

Exercício (pág. 12)

Resolução 3.1

Dados:

- $A(4,1,2)$
- $G(2,3,4)$
- $AE:(x,y,z)=(4,1,2)+k(3,-6,2),\ k\in\mathbb{R}$ (logo, $(3,-6,2)$ é um vetor diretor)

1. Queremos uma reta, por isso precisamos de um ponto e um vetor diretor. Temos ponto (que é G) e não temos vetor, mas sabemos que esse vetor é perpendicular à reta CG. Mas como estamos num cubo, ser perpendicular à reta CG é o mesmo que ser perpendicular à reta AE, ou seja, ser perpendicular ao vetor diretor $(3,-6,2)$.

   Concluímos assim que a equação da reta terá de satisfazer dois factos:

   - contém o ponto $G(2,3,4)$
   - o seu vetor diretor $\vec{v}$ é perpendicular ao vetor $(3,-6,2)$, ou seja, $\vec{v}\cdot(3,-6,2)=0$.

   Verificando estes dois factos para cada uma das opções, vemos que $(x,y,z)=(0,2,4)+k(2,1,0),\ k\in\mathbb{R}$ é a equação certa, pois contém o ponto $G(2,3,4)$:

$$(2,3,4)=(0,2,4)+k(2,1,0)\Leftrightarrow\begin{cases}2=0+2k\\3=2+k\\4=4+0k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=1\\k=1\\4=4\end{cases}\Leftrightarrow k=1$$

   e o seu vetor diretor $\vec{v}(2,1,0)$ é perpendicular a $(3,-6,2)$:

$$(2,1,0)\cdot(3,-6,2)=2\times 3+1\times(-6)+0\times 2=0$$

   Resposta: (C) $(x,y,z)=(0,2,4)+k(2,1,0), k\in\mathbb{R}$

2. Como queremos uma superfície esférica, precisamos de um centro e de um raio. Como a superfície esférica passa nos oito vértices do cubo, então o seu centro é o centro do cubo e o raio é metade do comprimento da diagonal do cubo.

   - Chamemos M ao centro do cubo. Como M é o centro do cubo, então M é o ponto médio entre $A(4,1,2)$ e $G(2,3,4)$. Por isso, as coordenadas de M são:

   $$M = \left(\frac{4+2}{2}, \frac{1+3}{2}, \frac{2+4}{2}\right) = (3,2,3)$$

   - Agora, vamos ao raio. Como o raio é metade da diagonal do cubo, então o raio é igual a $\|\overrightarrow{AM}\|$. Fazendo as contas, vemos que

   $$\overrightarrow{AM} = M - A = (3,2,3) - (4,1,2) = (-1,1,1)$$

   e, por isso,

   $$\|\overrightarrow{AM}\| = \|(-1,1,1)\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

   Como o centro é $(3,2,3)$ e o raio é $\sqrt{3}$, então a equação da superfície esférica é

   $$(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = (\sqrt{3})^2,$$

   ou seja,

   $$(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 3$$

   Resposta: $(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 3$

Exercício (pág. 14)

Resolução 3.2

Dados:

- $A(-3,2,3)$
- $B(0,b,0)$, em que $b < 0$
- $(x+2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9$ (logo $C(-2,0,1)$ e raio$= 3$)

1. Repara que o ângulo AOC é o ângulo entre os vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OC}$. Por isso, usando as duas fórmulas do produto escalar, sabemos que

$$\begin{aligned}\cos\left(A\hat{O}C\right) &= \frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}}{\|\overrightarrow{OA}\|\|\overrightarrow{OC}\|} = \frac{(-3,2,3)\cdot(-2,0,1)}{\sqrt{(-3)^2+2^2+3^2}\sqrt{(-2)^2+0^2+1^2}} \\ &= \frac{-3\times(-2)+2\times 0+3\times 1}{\sqrt{22}\sqrt{5}} = \frac{9}{\sqrt{110}}\end{aligned}$$

Usando a funcionalidade $\cos^{-1}$ ou arccos da tua calculadora (e garantindo que a calculadora está em graus), concluímos que

$$A\hat{O}C = \cos^{-1}\left(\frac{9}{\sqrt{110}}\right) = 30.89\cdots \approx 30.9°$$

Resposta: (D) 30.9°

2. Como queremos uma equação do plano tangente a essa superfície esférica no ponto B, então precisamos de um ponto do plano (que é B) e de um vetor normal ao plano (que é $\overrightarrow{BC}$).

Primeiro, descobrimos B. Repara que B é o ponto de interseção do semieixo negativo Oy (onde as coordenadas gerais são $(0,b,0)$, em que $b<0$) com a superfície esférica. Fazendo a interseção matematicamente, temos:

$$(0+2)^2+b^2+(0-1)^2=9 \Leftrightarrow b^2=4 \Leftrightarrow b=\pm 2 \underbrace{\Leftrightarrow}_{b<0} b=-2$$

Conclusão? B tem coordenadas $(0,-2,0)$.

Já temos B e já tínhamos C, por isso temos $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{BC}=C-B=(-2,0,1)-(0,-2,0)=(-2,2,1)$$

Já temos um ponto B e um vetor normal $\overrightarrow{BC}$, por isso já temos plano:

- Como $(-2,2,1)$ é o vetor normal, então o plano tem equação $-2x+2y+z+d=0$. Só falta saber d.
- Mas como $B(0,-2,0)$ pertence ao plano, então satisfaz essa equação, ou seja, temos $-2\times 0+2\times(-2)+0+d=0$, o que dá $d=4$.

Resposta: Uma possível equação é $-2x+2y+z+4=0$.

Exercício (pág. 15)

Resolução 3.3

Dados:

- $A(a,0,0)$ e $B(0,b,0)$, em que $a,b>0$
- C é o ponto médio de A e B ($C(a/2,b/2,0)$)
- $D(5,4,0)$
- $(x,y,z)=(5,4,0)+k(2,1,0), k\in\mathbb{R}$ (logo $(2,1,0)$ é um vetor diretor)
- Volume$=10\sqrt{5}\pi$
- Raio$=2\sqrt{5}$

1. Como queremos uma superfície esférica, então precisamos de um centro e de um raio. Como a superfície esférica tem centro em D e passa por C, então o centro é D e o raio é $\|\overrightarrow{DC}\|$.

Já sabemos o ponto: D tem coordenadas $(5,4,0)$. Para saber o raio $\|\overrightarrow{DC}\|$, temos de reparar que $\|\overrightarrow{DC}\|$ é a altura do cilindro. Para descobrir essa altura, é só usar a fórmula do volume:

$$\begin{aligned} V = A_b \times h \Leftrightarrow V &= \pi r^2 \times h \\ &\Leftrightarrow 10\sqrt{5}\pi = \pi(\sqrt{5})^2 \times \|\overrightarrow{DC}\| \\ &\Leftrightarrow 10\sqrt{5} = 5\|\overrightarrow{DC}\| \\ &\Leftrightarrow \|\overrightarrow{DC}\| = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

Como o centro é $D(5,4,0)$ e o raio é $\|\overrightarrow{DC}\| = 2\sqrt{5}$, então a equação da superfície esférica é

$$(x-5)^2 + (y-4)^2 + (z-0)^2 = (2\sqrt{5})^2$$

ou seja,

$$(x-5)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 20.$$

Resposta: (C) $(x-5)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 20$

2. Queremos $\overrightarrow{AB}$, por isso queremos A e B. Como A e B pertencem aos semieixos positivos Ox e Oy, respetivamente, então $A(a,0,0)$ e $B(0,b,0)$, em que $a,b > 0$. Sendo assim, podemos escrever $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0,b,0) - (a,0,0) = (-a,b,0)$$

Agora, basta descobrir a e b. Como temos duas incógnitas, precisamos de saber dois factos sobre a e b para poder criar um sistema de equações e descobrir a e b.

- Por um lado, como $\overrightarrow{AB}$ é um diâmetro da base, então $\overrightarrow{AB}$ é perpendicular à altura (ou seja, perpendicular à reta CD, ou seja, perpendicular ao vetor diretor $(2,1,0)$). Matematicamente:

$$(-a,b,0)\cdot(2,1,0) = 0 \Leftrightarrow -2a + b = 0 \Leftrightarrow b = 2a$$

- Já temos a primeira equação – agora queremos a segunda. Como $\overrightarrow{AB}$ é um diâmetro, então nós podemos descobrir o seu comprimento $\|\overrightarrow{AB}\|$. Como o raio da base do cilindro é $\sqrt{5}$, então o diâmetro $\|\overrightarrow{AB}\|$ é o dobro, ou seja, $2\sqrt{5}$. Matematicamente, obtemos o segundo facto:

$$\|\overrightarrow{AB}\| = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{(-a)^2 + b^2 + 0^2} = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 20$$

Já temos duas equações com a e b, por isso é só resolver o sistema e sabemos a e b:

$$\begin{cases} b = 2a \\ a^2 + b^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ a^2 + (2a)^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ a^2 = 4 \end{cases} \underbrace{\Leftrightarrow}_{a>0} \begin{cases} b = 2a \\ a = 2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \times 2 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 \\ a = 2 \end{cases}$$

Temos a e b, por isso temos $\overrightarrow{AB} = (-a,b,0) = (-2,4,0)$.

Resposta: $\overrightarrow{AB}(-2,4,0)$

Nota: Tinhas muita maneira de fazer este exercício. Por exemplo, em vez de usares os factos que eu usei, podias usar outros dois factos: o facto de que o ponto C pertence à reta CD e o facto de que $\|CD\|$ =Altura= $2\sqrt{5}$ (isto, claro, lembrando que C é o ponto médio de A e B e que, por isso, tem coordenadas $(a/2, b/2, 0)$).

Exercício (pág. 15)

Resolução 3.4

Dados:

- $E(-2,3,4)$
- $ABC: 3x-4y-3z-4=0$ (logo, $(3,-4,-3)$ é um vetor normal)

1. Queremos um plano, por isso precisamos de um ponto do plano e um vetor normal ao plano.

   Como passa pelo ponto E, então o nosso ponto do plano é E. Como é perpendicular ao plano ABC, então o seu vetor normal $\overrightarrow{n}$ é perpendicular ao vetor normal ao plano ABC.

   Concluímos assim que a equação do plano terá de satisfazer dois factos:

   - contém o ponto $E(-2,3,4)$
   - o seu vetor normal $\overrightarrow{n}$ é perpendicular ao vetor $(3,-4,-3)$, ou seja, $\overrightarrow{n} \cdot (3,-4,-3) = 0$.

   Verificando estes dois factos para cada uma das opções, vemos que $x+z-2=0$ é a equação certa, pois contém o ponto $E(-2,3,4)$:

   $$x+z-2 = (-2)+4-2 = 0$$

   e o seu vetor normal $\overrightarrow{n}(1,0,1)$ é perpendicular ao vetor $(3,-4,-3)$:

   $$(1,0,1)\cdot(3,-4,-3) = 1\times 3 + 0\times(-4) + 1\times(-3) = 0$$

   Resposta: (B) $x+z-2=0$

2. Queremos o ponto F. Repara que F é a interseção da reta EF com o plano ABC. Por isso, para descobrir F, basta ter a equação da reta EF e a equação do plano ABC e fazer a interseção dos dois.

   - Já temos o plano ABC, por isso só falta descobrir a equação da reta EF. Como queremos uma reta, então precisamos de um ponto e de um vetor diretor. Já temos um ponto — o ponto $E(-2,3,4)$. Para o vetor diretor, temos de reparar que a reta EF é perpendicular ao plano ABC e, por isso, um vetor diretor da reta EF é o vetor normal ao plano ABC, ou seja, o vetor $(3,-4,-3)$. Concluímos assim que uma equação da reta EF é

   $$(x,y,z) = (-2,3,4) + k(3,-4,-3),\ k\in\mathbb{R}$$

- Agora é só fazer a interseção. Olhando para a equação da reta, vês que as coordenadas gerais de um ponto da reta são $(-2+3k, 3-4k, 4-3k)$. E agora, é só substituir estas coordenadas na equação do plano ABC $3x-4y-3z-4=0$ e vemos que

$$\begin{aligned}
&3(-2+3k)-4(3-4k)-3(4-3k)-4=0\\
&\Leftrightarrow -6+9k-12+16k-12+9k-4=0\\
&\Leftrightarrow 34k-34=0\\
&\Leftrightarrow k=1
\end{aligned}$$

Como $k=1$, então subsituindo em $(-2+3k, 3-4k, 4-3k)$, vemos que as coordenadas de F são $(1,-1,1)$.

Resposta: $F(1,-1,1)$

Exercício (pág. 16)