Limites 1 – Como Calcular Limites

Ricardo Ferreira

Atualizado a 6/03/2023

Este é um excerto do meu primeiro livro de exame "**Arrasa no Exame: O teu Guia de Estudo de Matemática A!**", que já não está à venda. Descobre mais sobre o meu novo livro "**Arrasa no Exame: Matemática A!**", incluindo um vídeo de apresentação e duas fichas grátis, em https://loja.ricardo-ferreira.pt/produto/exame-matematica-a/.

Conteúdo

Um agradecimento especial à **Maria e Isabel** pelas correções :)

1 A estratégia geral

Para calcular limites $\lim_{x \to a} f(x)$, em que a pode ser $\pm\infty$, só precisamos de dois passos.

(1) Substituir — direto ou indeterminação?
(2) Fazer **limites notáveis**

Primeiro, substituimos x por a e fazemos as contas. Se tivermos sorte, o limite é imediato e nem precisamos passar ao segundo passo.

Se não for imediato, é porque nos dá uma de quatro indeterminações:

$$\boxed{\infty - \infty \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{0}{0} \qquad 0 \times \infty}$$

Nestes casos, não conseguimos calcular o limite imediatamente porque **um dos fatores quer ficar muito grande e o outro muito pequeno** (por exemplo $+\infty$ vs $-\infty$, ou ∞ vs $1/\infty$). Nestes casos, nós precisamos de desempatar, ou seja, perceber se o fator que está a querer ficar muito grande é mais "rápido"ou mais "lento"do que o fator que quer ficar muito pequeno.

Para desempatar, nós usamos os quatro **limites notáveis**

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \ (p \in \mathbb{R})$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Os dois limites $\ln x/x$ e e^x/x^p são uma indeterminação ∞/∞, por isso para desempatar, vemos qual é o termo que vai para infinito mais rapidamente. O que esses dois limites notáveis nos dizem é que $\ln x$ tende para infinito **mais lentamente** do que qualquer função polinomial (por exemplo, x) e que e^x tende para infinito **mais rapidamente** do que qualquer função polinomial. Vemos isto porque o limite $\ln x/x$ é 0, ou seja, o x "ganha", enquanto que o limite e^x/x^p é $+\infty$, ou seja, o e^x "ganha".

Por outro lado, os limites $(e^x - 1)/x$ e $\sin x/x$, sendo iguais a 1, dizem-nos que o termo de cima e o termo de baixo são igualmente rápidos. De certo modo, o limite diz-nos que a função $e^x - 1$ "comporta-se"como a função x perto de 0. E do mesmo modo, a função $\sin x$ "comporta-se"como a função x perto de 0.

No fundo, os limites notáveis apenas ajudam-nos a **comparar as diferentes "velocidades"** a que cada termo tende para o seu limite.

Se queres uma explicação mais detalhada, vê https://youtu.be/2o_yyxSq6aw?t=14.

2 Os limites clássicos

Há certos limites clássicos que vamos usar a toda a hora. E a maneira mais fácil de os sabermos é desenhando o gráfico.

(1) Desenhando os respetivos gráficos, determina os seguintes limites.

(a) $\lim_{x\to+\infty} x^2$

(b) $\lim_{x\to-\infty} x^2$

(c) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}$

(d) $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}$

(e) $\lim_{x\to 525} -2$

(f) $\lim_{x\to -625} 4$

(g) $\lim_{x\to+\infty} 1/x$

(h) $\lim_{x\to-\infty} 1/x$

(i) $\lim_{x\to 0^+} 1/x$

(j) $\lim_{x\to 0^-} 1/x$

(k) $\lim_{x\to+\infty} e^x$

(l) $\lim_{x\to-\infty} e^x$

(m) $\lim_{x\to+\infty} \ln x$

(n) $\lim_{x\to 0^+} \ln x$

(o) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x$

(p) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan x$

Limites clássicos? Faz o desenho!

3 Truques I: Álgebra de Limites

Como os limites de funções definem-se a partir dos limites de sucessões, então os **limites de funções herdam todas as propriedades simpáticas dos limites de sucessões** — principalmente, a álgebra de limites. Ou seja,

$$\boxed{\begin{aligned} \lim_{x\to a} (f(x)+g(x)) &= \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) \\ \lim_{x\to a} f(x)\times g(x) &= \lim_{x\to a} f(x) \times \lim_{x\to a} g(x) \\ \lim_{x\to a} f(x)/g(x) &= \lim_{x\to a} f(x) / \lim_{x\to a} g(x) \end{aligned}}$$

Na prática, sabendo nós os limites clássicos e os limites notáveis, conseguimos calcular qualquer limite que envolva somar, multiplicar ou dividir esses limites.

Vê alguns exemplos de álgebra de limites em https://youtu.be/2o_yyxSq6aw?t=359.

(1) Dos limites clássicos de $1/x$, sabemos que

$$\frac{1}{0^+} = +\infty, \quad \frac{1}{0^-} = -\infty, \quad \frac{1}{\pm\infty} = 0.$$

Usando isto e a álgebra de limites, calcula os seguintes limites.

(a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3x}$

(b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{3x}$

(c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x}$

(d) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x}$

(e) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}$

(f) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}$

(g) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}$

(h) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{xe^x \ln x}$

(i) $\lim_{x\to+\infty} \frac{7}{xe^x \ln x}$

(j) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}}$

(k) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\ln x}$

(l) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{-\ln x}$

(m) $\lim_{x\to 0^+} \frac{12}{-\ln x}$

(n) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\tan x}$

(o) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{-3}{\tan x}$

Sabendo os limites clássicos de $1/x$, podemos calcular qualquer limite $1/\cdots$.

(2) Usando apenas limites clássicos e álgebra de limites, calcula os seguintes limites.

(a) $\lim_{x\to+\infty} (x + e^x)$

(b) $\lim_{x\to+\infty} (-x - \sqrt{x})$

(c) $\lim_{x\to+\infty} xe^x$

(d) $\lim_{x\to+\infty} -x \ln x$

(e) $\lim_{x\to+\infty} (-x)(-\ln x)$

(f) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^x}$

(g) $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x^2}$

(h) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x}$

(i) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{\ln x}$

Há muitos casos que parecem indeterminação mas não são!!! Por exemplo, $\infty + \infty, \infty \times \infty, 0/\infty$ e $\infty/0$ não são indeterminações porque ambos os termos evoluem na mesma direção — por exemplo, os dois ∞ e ∞ querem ficar muito grandes ou os dois 0 e $1/\infty$ querem ficar muito pequenos. Conclusão: primeiro de tudo, tenta substituir! E não inventes indeterminações onde elas não existem!

(3) Usando apenas limites clássicos e álgebra de limites, calcula os seguintes limites.

(a) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\tan x}{\pi - 2x}$

(b) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\tan x}{\pi - 2x}$

(c) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\tan x}{(\pi - 2x)^2}$

(d) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\tan x}{3 + \pi - 2x}$

Temos que $\pm\infty/0^+ = \pm\infty$ e que $\pm\infty/0^- = \mp\infty$. Isto porque 0^+ significa "tender para 0 por valores maiores que 0 — ou seja, 0^+ vai ser sempre *um número positivo e por isso mantém o sinal. Por outro lado,* 0^- *significa "tender para* 0 *por valores menores que* 0 *— ou seja,* 0^- *vai ser sempre um número negativo e por isso troca o sinal. No fundo,* 0^+ ***é um "número"positivo e*** 0^- ***é um "número"negativo****. Atenção: isto já não é verdade, por exemplo, para* 3^-*, porque tender para* 3 *por valores menores que* 3 *é um número positivo!*

(4) Usando apenas limites clássicos, limites notáveis e álgebra de limites, calcula os seguintes limites.

(a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2}$

(b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^{525}}$

(c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{(\sqrt{x})^3}$

(d) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^{-1}}$

(e) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^{-525}}$

(f) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{(\sqrt{x})^{-3}}$

Dica: Quando vemos uma raíz, devemos imediatamente passá-la a potência (trabalhar com raízes é chato, mas trabalhar com potências é fácil!)

Se $p \geq 1$*, então para resolver* $\lim_{x \to +\infty} \ln x / x^p$ *basta usar o limite notável* $\ln x / x$*. Se* $p \leq -1$*, então o limite é imediato. Por isso, primeiro de tudo, tenta substituir!*

(5) Usando apenas limites clássicos, limites notáveis e álgebra de limites, calcula os seguintes limites.

(a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}}{x}$

(b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}}{x^5}$

(c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{4x}}{x^5}$

(d) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x}}{\sqrt{x}}$

(e) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x}}{\sqrt[3]{x}}$

(f) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}}{\sqrt{x}}$

Dica: Escreve $e^{2x} = e^x \times e^x$

Qualquer função exponencial e^x *tende para* $+\infty$ *mais rapidamente do que qualquer raíz. Assim, para comparar* e^x *e* $\sqrt{x}$*, temos de escrever* e^x *na forma* $\sqrt{e^{2x}}$*. No fundo, o segredo é "meter tudo para dentro da raíz".*

(6) Usando apenas limites clássicos, limites notáveis e álgebra de limites, calcula os seguintes limites.

(a) $\lim_{x\to-\infty}(5x^5+3x^3+x)$

(b) $\lim_{x\to-\infty}(2x^4+4x^2+6)$

(c) $\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{x}$

(d) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{x}$

(e) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+x^2+3x}{x}$

(f) $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x^2}$

(g) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x^2}$

(h) $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}}{x^2}$

(i) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(e^x-1)}{x^2}$

(j) $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x(e^x-1)}{x^3}$

Primeiro de tudo, tenta substituir!

4 Truques II: Inversão

Por vezes, temos coisas que quase são limites notáveis, só que o **numerador e o denominador estão trocados**. Por exemplo,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}.$$

Para resolver este problema, basta lembrar-nos das regras das frações:

$$\boxed{\frac{x}{\ln x}=\frac{1}{\frac{\ln x}{x}}.}$$

Assim, aplicando a álgebra de limites, temos que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}=\frac{1}{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}$$

E agora já podemos aplicar o nosso limite notável! Vê outro exemplo em https://youtu.be/2o_yyxSq6aw?t=481

(1) Combinando limites clássicos e limites notáveis com álgebra de limites e inversão, calcula os seguintes limites.

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}$

(b) $\lim_{x\to 0}\frac{3x}{e^x-1}$

(c) $\lim_{x\to 0}\frac{3x}{1-e^x}$

(d) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{e^x-1}$

(e) $\lim_{x\to 0}\frac{x^3+3x^2+5x}{e^x-1}$

(f) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x}$

(g) $\lim_{x\to0^+} \frac{x}{\ln x}$

(h) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{\ln x}$

(i) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x}$

(j) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^x}$

(k) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{e^x}$

(l) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln x}{e^x}$

(m) $\lim_{x\to0^+} \frac{x^2}{\sin x(1-e^x)}$

(n) $\lim_{x\to0^+} \frac{(\sqrt{x})^5}{\sin x(1-e^x)}$

(o) $\lim_{x\to0^+} \frac{\sin x + x^2}{xe^x - x}$

Primeiro de tudo, tenta substituir!!

5 Truques III: Intermediário

Por vezes, temos limites como

$$\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{\sin x},$$

em que não conseguimos comparar os limites $e^x - 1$ e $\sin x$ diretamente, mas podemos compará-los indiretamente através do x (que vamos chamar de "intermediário").

Pelos limites notáveis $(e^x-1)/x$ e $\sin x/x$, nós sabemos que tanto $e^x - 1$ como $\sin x$ se comportam como x perto de 0. Por isso, $e^x - 1$ tem de se comportar como $\sin x$ perto de 0.

Mas na prática, como é que transmitimos esta ideia de comparar $e^x - 1$ e $\sin x$ indiretamente através do x? Ora, é simples: multiplicamos por 1. Ou mais especificamente, **dividimos em cima em baixo pelo nosso intermediário** (neste caso, x). Fica então

$$\boxed{\lim_{x\to0} \frac{(e^x-1)/x}{\sin x/x}}$$

E agora que já fizemos aparecer os nossos limites notáveis, concluímos que o limite é 1, como esperávamos.

Vê outro exemplo em https://youtu.be/2o_yyxSq6aw?t=791

(1) Criando um intermediário, calcula o limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{e^x}.$$

Pelos limites notáveis e^x/x^p e $\ln x/x$, nós sabemos que e^x tende para $+\infty$ mais rapidamente do que qualquer função polinomial e que qualquer função polinomial tende para $+\infty$ mais rapidamente do que $\ln x$. Sendo assim, e^x tende para $+\infty$ mais rapidamente do que $\ln x$.

(2) Usando todas as técnicas que aprendeste até agora, calcula os seguintes limites.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin x}$ (d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{e^{2x}}$ (g) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x \ln x}{e^x}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{\sin x}$ (e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{e^x}$ (h) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3 \ln x}{e^x}$

(c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{\ln x}$ (f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(\ln x)^{525}}{e^x}$ (i) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3 (\ln x)^2}{e^x}$

Nem sempre o intermediário é x (muitas vezes é x^p). Com este truque, vemos que que a função e^x tende para $+\infty$ mais rapidamente do que qualquer função logarítmica ou polinomial (ou qualquer combinação das duas).

(3) Usando todas as técnicas que aprendeste até agora, bem como as fórmulas da trigonometria, calcula os seguintes limites.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\tan x}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{e^x - 1}$

A função $\tan x$ comporta-se como as funções $x, \sin x, e^x - 1$ perto de 0.

6 Truques IV: Pôr em evidência

Tal como nas sucessões, quando temos indeterminações $\infty - \infty$ ou ∞/∞, nós já sabemos que **são os monomómios mais fortes que "mandam"**.

Na prática, para ilustrar esta ideia, o que fazemos é **colocar o monómio mais forte em evidência**.

Por exemplo, se tivermos

$$\lim_{x\to +\infty} (3x^3 - x^2 - 2),$$

temos uma indeterminação $\infty - \infty$. Para desempatar, nós vamos colocar o monómio mais forte, $3x^3$, em evidência. Fica então

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} x^3 \left(1 + \frac{1}{3x} - \frac{2}{3x^3}\right)}$$

Com isto, todos os limites dentro do parênteses tendem para 0 exceto o primeiro. Resta-nos assim

$$\lim_{x\to +\infty} x^3,$$

que é o limite do monómio mais forte.

E pensamos da mesma maneira para frações. Se tivermos, por exemplo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+1}{2x^2+\ln x},$$

temos uma indeterminação ∞/∞. Para desempatar, nós vamos colocar o monómio mai fortes do numerador e o monómio mais forte do denominador em evidência (neste caso, e^x e $2x^2$). Fica então

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}{2x^2\left(1+\frac{\ln x}{2x^2}\right)}}$$

Com isto, todos os termos dentro de parênteses tendem para 0 exceto os primeiros. Resta-nos assim

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x^2},$$

que é o limite do monómio mais forte do numerador a dividir pelo monómio mais forte do denominador.

(1) Utilizando todas as técnicas que aprendeste até agora, calcula os seguintes limites.

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-x^2)$

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-x^2)$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-2x-3)$

(d) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-2x-3)$

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-2x+3)$

(f) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-2e^x+3)$

(g) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x^3-\ln x)$

(h) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2e^x-\ln x)$

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x+2x^2-3e^x)$

(j) $\lim\limits_{x\to+\infty}(xe^x-\ln x)$

(k) $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-x\ln x)$

(l) $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-e^{2x}+1)$

(m) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^3+3x^2}$

(n) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x-e^x}{2x^2-3}$

(o) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x-x^3}{3x^3+4x}$

(p) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x-x^3}{1-x^2}$

(q) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^4+x^3\ln x+1}{1-2x^4}$

O monómio mais forte manda!

7 Truques V: Conjugado

Para resolver certos limites mais obscuros como

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$$

ou

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x},$$

o truque é **multiplicar o numerador e o denominador pelo "conjugado"**.

A ideia é que não conseguimos trabalhar com $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ ou $1-\cos x$, mas conseguimos trabalhar com $(\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{x})^2$ e $1-\cos^2 x$.

Vê o exemplo de $(1-\cos x)/x$ em https://youtu.be/2o_yyxSq6aw?t=1086.

(1) Usando todas as técnicas que aprendeste até agora, calcula os seguintes limites.

(a) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

(b) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{e^x-1}-\sqrt{e^x})$

(c) $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{e^x-1}-\sqrt{e^x+1}}$

(d) $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\ln x+1}-\sqrt{\ln x-1}}$

(e) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$

(f) $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{x}$

(g) $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{x^2}$

(h) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{e^x}-1}{x}$

(i) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x/2}-1}{x}$

(j) $\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x/2}-1}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}$

(2) Usando todas as técnicas que aprendeste até agora, calcula os seguintes limites.

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$

(b) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

(c) $\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\cos x-1}$

(d) $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x-\tan x}{x^2}$

(e) $\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x-\sin x}{\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^2+1}}$

Trigonometria? Usa as fórmulas!.

8 Truques VI: Mudança de variável

A mudança de variável é o truque mais importante dos limites, porque não só nos permite **passar limites quase notáveis a limites notáveis**, como também nos permite **mudar o valor para o qual x está a tender**. Vê exemplos destes dois usos em https://youtu.be/2o_yyxSq6aw?t=543

As **três mudanças de variável clássicas** são

$$\boxed{y = x - k} \qquad \boxed{y = -x} \qquad \boxed{y = 1/x}$$

A primeira permite passar um limite $x \to k$ a um limite $y \to 0$. A segunda permite mudar entre 0^- e 0^+, ou $-\infty$ e $+\infty$. A terceira, permite mudar entre 0^+ e $+\infty$ ou 0^- e $-\infty$. Qualquer outra mudança de variável é uma combinação destas três.

Para passar limites notáveis a quase notáveis, ainda temos a mudança de variável

$$\boxed{y = kx}$$

que podemos combinar com as anteriores. Mas ao contrário das anteriores, $x \to 0$ fica $y \to 0$ e $x \to \pm\infty$, fica $x \to \pm\infty$.

E **como fazer uma mudança de variável?** Dá jeito incluir três informações:

$$\boxed{\begin{array}{c} y = x - 2 \\ \text{Se } x \to 2, \text{ então } y = x - 2 \to 0 \\ x = y + 2 \end{array}}$$

A primeira linha é a mudança de variável propriamente dita (essa incluímos sempre). As duas linhas seguintes dizem-nos como escrever o limite na nova variável: a segunda linha diz-nos para onde é que o y tende e a terceira linha diz-nos que onde estiver x, temos de substituir por $y + 2$.

Assim, se tivermos o limite

$$\lim_{x \to 2} \frac{e^{x-2} - 1}{x^2 - x - 2}$$

e fizermos a mudança de variável $y = x - 2$, então já sabemos que $y \to 0$ e que $x = y + 2$. Fica então

$$\lim_{y \to 0} \frac{e^{(y+2)-2} - 1}{(y+2)^2 + (y+2) - 2}.$$

e é só resolver.

(1) Usando todas as técnicas que aprendeste até agora, calcula os seguintes limites.

(a) $\lim_{x \to 2} \frac{e^{x-2} - 1}{x - 2}$

(b) $\lim_{x \to 2} \frac{e^{x-2} - 1}{(x-2)(x+2)}$

(c) $\lim_{x \to 2} \frac{e^{x-2} - 1}{x^2 - x - 2}$

(d) $\lim_{x \to \frac{3}{2}} \frac{e^{2x-3} - 1}{4x^2 - 4x - 3}$

(e) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x + 3}{\ln(x+3)}$

(f) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + 3}{\ln(e^x + 3)}$

(g) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 2x - 3}{\ln(x+3)}$

(h) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 2x - 3}{\ln(x+3) + \ln(x-1)}$

(i) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{5x} - 1}{\sin(5x)}$

(j) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan(5x)}{5x^2 - 5x}$

Mudança de variável? Primeiro decide qual ($y = x - 2$). Depois, vê o que tens de substituir ($x = y + 2$ e se $x \to 2$, então $y = x - 2 \to 0$).

(2) Usando todas as técnicas que aprendeste até agora, calcula os seguintes limites.

(a) $\lim_{x \to 0^+} x \ln x$

(b) $\lim_{x \to 0^+} x^2 \ln x$

(c) $\lim_{x \to 0^+} (x^3 - 2x) \ln x$

(d) $\lim_{x \to -\infty} xe^x$

(e) $\lim_{x \to -\infty} e^x \ln(-x)$

Indeterminação $0 \times \infty$? Transforma-a numa indeterminação ∞/∞ ou $0/0$! (por exemplo, através de uma mudança de variável). No fundo, como $1/\infty = 0$, então as indeterminações $0 \times \infty, \infty/\infty$ e $0/0$ são todas a mesma indeterminação!

9 Truques VII: Criar constante

Na maioria das vezes, temos situações como

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(3x)}{x},$$

em que dá quase para fazer uma mudança de variável+limite notável, só que dava jeito ter um 3 no denominador. Para isso, **multiplicamos por 1**, mais precisamente, por 3/3. Assim, um dos 3 vai para onde nós queremos e outro vai para fora do limite. Agora, podemos facilmente aplicar a mudança de variável+limite notável.

Vê outro exemplo em https://youtu.be/2o_yyxSq6aw?t=1010

(1) Usando todas as técnicas que aprendeste até agora, calcula os seguintes limites.

(a) $\lim_{x\to0^+}\frac{e^{3x}-1}{x}$

(b) $\lim_{x\to0^+}\frac{e^{-x}-1}{x}$

(c) $\lim_{x\to0^+}\frac{e^{3x}-1}{x^2}$

(d) $\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin(-5x)}$

(e) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(3x)}{x}$

(f) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(5x)}{x^3}$

(g) $\lim_{x\to0}\frac{e^{-3x}-1}{\sin(-3x)}$

(h) $\lim_{x\to0}\frac{e^{-3x}-1}{\sin(5x)}$

(i) $\lim_{x\to0}\frac{\tan(2x)}{e^{3x}-1}$

(2) Calcula os seguintes limites. Faz isto de duas maneiras: uma, através de da mudança de variável; outra, através das fórmulas de $\sin(2x)$ e $\cos(2x)$.

(a) $\lim_{x\to0}\frac{\sin(2x)}{x}$

(b) $\lim_{x\to0}\frac{\tan(2x)}{x}$

(c) $\lim_{x\to0}\frac{\cos(2x)-1}{x}$

10 Truques VIII: Um limite seminotável

O limite

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}.$$

calcula-se de uma maneira muito especial: através da mudança de variável

$$\boxed{y=\ln(x+1)}$$

Assim, vemos que $x=e^y-1$ e nós sabemos esse limite notável. No fundo, isto funciona porque $\ln(x+1)$ é a inversa de e^x-1 — daí lhe chamarmos um limite **seminotável**.

Vê este e mais exemplos em https://youtu.be/2o_yyxSq6aw?t=1227

(1) Calcula os seguintes limites.

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x}$

(b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\ln(x+1)}$

(c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}-1}$

(d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(3x+1)}{x}$

(e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(5x+1)}{x}$

(f) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(x+5)}{x}$

(g) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\ln(5x+3)}{x}$

(h) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x^2}$

A mudança de variável $y =$numerador resulta sempre! Mas primeiro, tenta substituir!

11 Truques IX: Continuidade

Consideremos o limite

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x+1).$$

Quando substituímos imediatamente e dizemos que o limite é 0, o que nós estamos a fazer secretamente é trocar o limite com a função, ou seja,

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \ln(x+1) = \ln\left(\lim_{x \to 0^+} (x+1)\right)}$$

Vemos então que isto dá $\ln(1^+)$, ou seja, 0.

De facto, este é um padrão geral: se f é uma função **contínua**, então **podemos trocar a função e o limite**.

E as ótimas notícias é que todas as funções que estudámos são contínuas! Ou seja, desde que estejamos dentro do domínio da função, podemos sempre trocar a função e o limite.

De facto, nós pudemos trocar a função e o limite apenas porque $\ln(\cdots)$ é uma função contínua e porque $x+1$ convergia dentro do domínio de $\ln(\cdots)$.

(1) Trocando a função e o limite, calcula os seguintes limites. Sempre que trocares, indica qual é a função contínua que estás a trocar.

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} (\ln x)^2$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x}$

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)$

(e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \cos\left(e^x\right)$

(f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \tan\left(\dfrac{4-x^3}{e^{2x}}\right)$

(g) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x^2}$

(h) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{(x^2-2x+4)}$

(i) $\lim\limits_{x\to 0} e^{\sin(x)/x}$

12 Como calcular qualquer limite

Limites? Resolvem-se em dois passos!

(I) Primeiro, **tenta substituir**! É bem possível que o limite não seja indeterminação.

(II) Mas se for uma indeterminação, então usa **limites notáveis**. Para saberes o que fazer, presta atenção a duas coisas:

- para onde o x está a tender;
- para os termos dentro do limite.

Se repararmos, **todos os limites notáveis acontecem quando** $x \to +\infty$ **ou quando** $x \to 0$. Por isso, se o nosso limite for outro: por exemplo $x \to -\infty$ ou $x \to 2$, então temos que fazer uma mudança de variável.

Depois, **os termos dentro do limite dizem-nos quais limites notáveis usar**. Por exemplo, se envolver funções trigonométricas, provavelmente usamos o limite notável $\sin x/x$ (por isso, também já sabemos que queremos $x \to 0$). Se envolver logaritmos, provavelmente usamos $\ln x/x$ (por isso, queremos $x \to +\infty$). Se envolver exponenciais, pode tanto envolver $(e^x-1)/x$ como e^x/x^p, por isso temos de perceber se é mais fácil fazer aparecer e^x-1 ou apenas e^x (e assim decidir se queremos $x \to 0$ ou $x \to +\infty$). Se envolver raízes quadradas, provavelmente usamos um conjugado. E se envolver polinómios, provavelmente pomos em evidência os monómios mais fortes.

(1) Utilizando todas as técnicas que aprendeste (incluindo as fórmulas dos logaritmos e da trigonometria), resolve os seguintes limites.

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-e^{5x}}{3e^{3x}-\ln x}$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^{2x}-2x^3-3x^2)$

(c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{x-1}-1}{x-\sqrt{x+1}}$

(d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\tan x$

(e) $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x^2-x)e^x$

(f) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x^2+x)}{x}$

(g) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^2\ln x}$

(h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(2x)-1}{x^2}$

(i) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{e^{x-2}-2}{x^2-2x}$

(j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}+e^x-2}{x}$

(k) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x(\sin x)}{x^2}$

(l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(4x)-\sin(3x)}{e^{5x}-1}$

(m) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{\sqrt{x+1}}$

Primeiro de tudo, tenta substituir!!!

13 Soluções

Para verificar as respostas que envolvam desenhar gráficos, usa a tua calculadora gráfica ou visita:

- https://www.desmos.com/calculator (Desmos)
- https://www.geogebra.org/calculator (Geogebra)

Se o resultado de algum limite não coincidir com as soluções, verifica também em

- https://www.wolframalpha.com (WolframAlpha)

13.1 A estratégia geral

13.2 Os limites clássicos

(1) (a) $+\infty$
(b) $+\infty$
(c) $+\infty$
(d) 0
(e) -2
(f) 4
(g) 0
(h) 0
(i) $+\infty$
(j) $-\infty$
(k) $+\infty$
(l) 0
(m) $+\infty$
(n) $-\infty$
(o) $+\infty$
(p) $-\infty$

13.3 Truques I: Álgebra de Limites

(1) (a) 0
(b) 0
(c) 0
(d) 0
(e) 0
(f) 0
(g) 0
(h) 0
(i) 0
(j) $+\infty$
(k) 0
(l) 0
(m) 0
(n) 0
(o) 0

(2) (a) $+\infty$
(b) $-\infty$
(c) $+\infty$
(d) $-\infty$
(e) $+\infty$
(f) $-\infty$
(g) 0
(h) $-\infty$
(i) 0

(3) (a) $+\infty$
(b) $+\infty$
(c) $-\infty$
(d) $-\infty$

(4) (a) 0
(b) 0
(c) 0
(d) $+\infty$
(e) $+\infty$
(f) $+\infty$

(5) (a) $+\infty$
(b) $+\infty$
(c) $+\infty$
(d) $+\infty$
(e) $+\infty$
(f) $+\infty$

(6) (a) $-\infty$
(b) $+\infty$
(c) -1
(d) $+\infty$
(e) $+\infty$
(f) 0
(g) $+\infty$
(h) 0
(i) 1
(j) $-\infty$

13.4 Truques II: Inversão

(1) (a) 1
(b) 3
(c) -3
(d) 0
(e) 5
(f) $+\infty$
(g) 0
(h) $+\infty$
(i) 0
(j) 0
(k) $-\infty$
(l) 0
(m) -1
(n) 0
(o) $+\infty$

13.5 Truques III: Intermediário

(1) 1

(2) (a) 1
(b) 2
(c) 1
(d) 0
(e) 0
(f) 0
(g) 0
(h) 0
(i) 0

(3) (a) 1
(b) 1
(c) 1

13.6 Truques IV: Colocar em evidência

(1) (a) $+\infty$
(b) $-\infty$
(c) $+\infty$
(d) $+\infty$
(e) $+\infty$
(f) $-\infty$
(g) $+\infty$
(h) $+\infty$
(i) $-\infty$
(j) $+\infty$

(k) $+\infty$
(l) $-\infty$
(m) $+\infty$
(n) $-\infty$
(o) $-1/3$
(p) $+\infty$
(q) -2

13.7 Truques V: Conjugado

(1) (a) 0
(b) 0
(c) $-\infty$
(d) $+\infty$
(e) 0
(f) $-1/2$
(g) $-\infty$
(h) $1/2$
(i) $1/2$
(j) -1

(2) (a) 0
(b) $1/2$
(c) $-\infty$
(d) 0
(e) 0

13.8 Truques VI: Mudança de variável

(1) (a) 1
(b) $1/4$
(c) $1/3$
(d) $1/4$
(e) $+\infty$
(f) $+\infty$
(g) $+\infty$
(h) $+\infty$
(i) 1
(j) -1

(2) (a) 0
(b) 0
(c) 0
(d) 0
(e) 0

13.9 Truques VII: Criar constante

(1) (a) 3
(b) -1
(c) $+\infty$
(d) $-1/5$
(e) 0
(f) 0
(g) 1
(h) $-3/5$
(i) $2/3$

(2) (a) 2
(b) 2
(c) 0

13.10 Truques VIII: Um limite seminotável

(1) (a) 1
(b) 1
(c) 2
(d) 3
(e) 5
(f) $+\infty$
(g) $-\infty$
(h) 1

13.11 Truques IX: Continuidade

(1) (a) $+\infty$
(b) $+\infty$
(c) $+\infty$
(d) 0
(e) 1
(f) 0
(g) $+\infty$
(h) $+\infty$
(i) 1

13.12 Como calcular qualquer limite

(1) (a) $-\infty$
(b) $+\infty$
(c) $4/3$
(d) -1
(e) 0
(f) $-\infty$
(g) $-\infty$
(h) 0
(i) $+\infty$
(j) 3
(k) $+\infty$
(l) $1/5$
(m) $+\infty$