Estatística (12 pontos)

Este é um excerto do meu livro
"**Arrasa no Exame: Matemática A**".

Descobre mais sobre o livro, incluindo um vídeo de apresentação e **todas as Fichas Grátis Atualizadas**, em

https://loja.ricardo-ferreira.pt/produto/exame-matematica-a/

1. Estatística com 1 Variável

Este capítulo de Estatística com 1 variável é só Lei Fundamental da Matemática (ou seja, "se queres 1 incógnita, então precisas de 1 equação com essa incógnita". Ou, no geral, **"se queres n incógnitas, então precisas de n equações com essas incógnitas"** - para resolver um sistema de n equações).

Vamos aprender imensas novas palavras, cada uma com a sua equação ou maneira de calcular correspondente. E, **para cada uma dessas novas palavras, o único exercício é calculá-las, resolvendo equações** (ou seja, aplicando a Lei Fundamental da Matemática sempre que necessário).

Se prestares atenção, verás que a maioria dos exercícios de Matemática resolvem-se sempre da mesma maneira: **traduzindo o enunciado para equações, resolvendo essas equações e assim chegando ao resultado**. Ou seja, quase todos os exercícios de Matemática envolvem aplicar a Lei Fundamental da Matemática!

1.1 Treino 1: As 4 Frequências

1.1.1 Frequência Absoluta

1.1.1.1 O que é Frequência Absoluta? (Identificá-la numa lista de dados)

Exercício 1.1

Sabe-se que a **frequência absoluta** de um dado é o "número de vezes que esse dado aparece", ou seja,

$$\boxed{\text{FA}(x) = \text{número de vezes que } x \text{ aparece}}$$

Nota: No x que está em $\text{FA}(x)$, podes colocar o que quiseres, especialmente os 3 grandes tipos de dados (palavras, números, intervalos $[a,b[$):

$$\text{FA}(\text{Azul}), \text{FA}(625), \text{FA}([625,635[)$$

Sabendo isto, para cada um dos seguintes 3 conjuntos de dados, responde às perguntas.

1. Mau, Mau, Bom, Bom, Bom, Bom, Ok, Ok, Ok

    a. Quanto é a frequência absoluta de "Mau"?

b. Quanto é a frequência absoluta de “Bom”?
c. Quanto é $\mathrm{FA}(\mathrm{Ok})$?
d. Qual é o dado que tem frequência absoluta 3?
e. Qual é o dado que tem frequência absoluta 2?
f. Qual é o dado que tem $\mathrm{FA}(x) = 4$?

2. $1,2,2,2,2,4,4,4,5,7,7$

   a. Quanto é a frequência absoluta de 4?
   b. Quanto é $\mathrm{FA}(7)$?
   c. Qual é o dado que tem frequência absoluta 4?
   d. Quais são os dados que têm $\mathrm{FA}(x) = 1$?
   e. Quanto é a frequência absoluta de 2?

3. $[0,5[,\ [5,10[,\ [5,10[,\ [5,10[,\ [10,15[,\ [10,15[,\ [15,20[$

   a. Qual é o dado que tem $\mathrm{FA}(x) = 2$?
   b. Quanto é $\mathrm{FA}([0,5[)$?
   c. Qual é o dado que tem frequência absoluta 3?

Exemplo:

1. Rosa, Rosa, Azul, Azul, Verde

   a. Quanto é a frequência absoluta de “Rosa”? 2
   b. Qual é o dado que tem frequência absoluta 1? Verde

2. $4,4,7,9,9,9$

   a. Quanto é $\mathrm{FA}(9)$? 3
   b. Qual é o dado que tem frequência absoluta 2? 4

3. $[1,4[,\ [4,7[,\ [4,7[,\ [7,10[$

   a. Quanto é a frequência absoluta de $[7,10[$? 1
   b. Qual é o dado que tem $\mathrm{FA}(x) = 2$? $[4,7[$

Resolução (pág. 50)

*Frequência Absoluta? É **número**! (de vezes que aparece)*

(e não interessa se os dados são palavras, numeros ou intervalos!)

1.1.1.2 O que é a Tabela de Frequências Absolutas? (Identificar Frequências Absolutas na tabela)

Exercício 1.2

Escrever a lista de dados toda dá trabalho e leva a erros.

Rosa, Rosa, Rosa, Rosa, Rosa, Azul, Azul, Azul, Verde, Verde

Por isso, normalmente colocamos esses dados numa **Tabela de Frequências Absolutas**.

x	$\mathrm{FA}(x)$
Rosa	5
Azul	3
Verde	2

Sabendo isto, para cada um dos seguintes 3 conjuntos de dados (organizados em Tabelas de Frequências Absolutas), responde às perguntas.

1.

x	$\mathrm{FA}(x)$
Janeiro	21
Fevereiro	17
Março	32
Abril	28

a. Quanto é a frequência absoluta de “Janeiro”?
b. Quanto é a frequência absoluta de “Março”?
c. Quanto é $\mathrm{FA}(\text{Abril})$?
d. Qual é o dado que tem frequência absoluta 21?
e. Qual é o dado que tem $\mathrm{FA}(x) = 17$?

2.

x	$\mathrm{FA}(x)$
9	88
21	19
37	121
50,1	22

a. Qual é o dado que tem frequência absoluta 19?
b. Quanto é a frequência absoluta de 9?
c. Quanto é $\mathrm{FA}(50{,}1)$?

3.

x	$\mathrm{FA}(x)$
$[0,20[$	8
$[20,40[$	1111
$[40,60[$	777
$[60,80[$	44

a. Qual é o dado que tem $\mathrm{FA}(x) = 777$?
b. Quanto é $\mathrm{FA}([60,80[)$?

Exemplo:

1.

x	$\mathrm{FA}(x)$
Rosa	12
Azul	8
Verde	10

a. Quanto é $\mathrm{FA}(\text{Rosa})$? 12
b. Qual é o dado que tem $\mathrm{FA}(x) = 8$? Azul

Resolução (pág. 50)

Tabela de Frequências Absolutas?

1. *Primeira coluna é os* ***dados*** x
2. *Segunda coluna é a* ***Frequência Absoluta*** $\mathrm{FA}(x)$

(e não interessa se os dados x são palavras, numeros ou intervalos!)

1.1.1.3 O que é Frequência Absoluta Total (Resolver Equações)

Exercício 1.3

Em Matemática, quando falamos no “Total” de algo, isso normalmente significa “Somar todos” desse algo. Neste caso, eu chamo de **Frequência Absoluta Total** à **soma de todas as**

frequências absolutas:

$$\boxed{\text{FA}_{\text{Total}} = \text{Soma de todos os FA}(x)}$$

Ou, se preferires algo mais explícito,

$$\boxed{\text{FA}_{\text{Total}} = \text{FA}(x_1) + \text{FA}(x_2) + \cdots + \text{FA}(x_n)}$$

onde $x_1, x_2, \cdots, x_n$ são todos os dados do teu conjunto.

Esta FA_{Total} dará muito jeito nos cálculos, por isso, embora não faça parte da Tabela de Frequências Absolutas, eu coloco-a lá sempre (por debaixo das frequências absolutas individuais):

x	$\text{FA}(x)$
Rosa	2
Azul	1
Verde	3
	6

Lembrando que, na Matemática, "se queres 1 incógnita, então precisas de 1 equação com essa incógnita", usa a equação da Frequência Absoluta Total para calcular as incógnitas pedidas.

1. FA_{Total}

x	$\text{FA}(x)$
Rosa	10
Azul	40
Verde	20

2. FA_{Total}

x	$\text{FA}(x)$
Rosa	10
Azul	40
Verde	20
Preto	100

3. $\text{FA}(\text{Azul})$, sabendo que $\text{FA}_{\text{Total}} = 170$

x	$\text{FA}(x)$
Rosa	10
Azul	
Verde	20
Preto	100
	170

4. $\text{FA}(\text{Preto})$, sabendo que $\text{FA}_{\text{Total}} = 170$

x	$\text{FA}(x)$
Rosa	10
Azul	40
Verde	20
Preto	
	170

5. a, sabendo que $\text{FA}_{\text{Total}} = 170$

x	$\text{FA}(x)$
Rosa	10
Azul	40
Verde	a
Preto	100
	170

6. a, sabendo que $\text{FA}_{\text{Total}} = 17a$

x	$\text{FA}(x)$
Rosa	a
Azul	40
Verde	20
Preto	100
	$17a$

7. $\text{FA}(62)$, sabendo que $\text{FA}_{\text{Total}} = 120$

x	$\text{FA}(x)$
13	62
28	40
62	
	120

8. $\text{FA}([1,4[)$, sabendo que $\text{FA}_{\text{Total}} = 6a$

x	$\text{FA}(x)$
$[1,4[$	$2a$
$[4,7[$	15
$[7,11[$	a
	$6a$

Exemplo:

1. FA_{Total}

x	$FA(x)$
Rosa	2
Azul	1
Verde	3

Queremos FA_{Total}, por isso precisamos de 1 equação com FA_{Total}. Qual equação? Queremos FA_{Total} e temos Frequências Absolutas individuais, por isso é a equação que relaciona isso tudo: a equação da FA_{Total}.

$$FA_{Total} = 2 + 1 + 3$$
$$\Leftrightarrow FA_{Total} = 6$$

2. FA_{Total}, sabendo que $FA_{Total} = 3a$

x	$FA(x)$
Rosa	a
Azul	1
Verde	3
	$3a$

Queremos FA_{Total} (que é igual a $3a$). Por isso, se descobrirmos a, então descobrimos FA_{Total}.

Queremos a, por isso precisamos de 1 equação com a. Qual equação? Temos Frequências Absolutas Individuais e Total, por isso é a equação que relaciona isso tudo: a equação da FA_{Total}.

$$3a = a + 1 + 3$$
$$\Leftrightarrow a = 2$$

Como $a = 2$, então

$$FA_{Total} = 3a = 3 \times 2 = 6$$

Nota: Há um padrão na Matemática, que aparece em todas as matérias, que é tão importante que eu lhe chamo a **Lei Fundamental da Matemática**. E que padrão é esse?

- "Queres x? Então precisas de 1 equação com x!
- Ou, no geral: "Queres 1 incógnita? Então precisas de 1 equação com essa incógnita!
- Ou mais geral ainda, "Queres n incógnitas? Então precisas de n equações com essas incógnitas! (para resolver um sistema de n equações)

No fundo, **equações são as ferramentas para descobrires incógnitas**. Por isso, sempre que aprendes uma nova equação, lembra-te: **tens aí mais uma equação que poderás usar para descobrir incógnitas!** (e repara: descobrir incógnitas é literalmente quase todos os exercícios de Matemática!)

Resolução (pág. 50)

1.1.2 Frequência Relativa

1.1.2.1 O que é Frequência Relativa? (Resolver Equações)

Exercício 1.4

Sabe-se que a **frequência relativa** de um dado (em relação a um certo total) é dividir a frequência absoluta desse dado pela frequência absoluta total, ou seja

$$\boxed{FR(x) = \frac{FA(x)}{FA_{Total}}}$$

Usando esta equação, calcula os valores pedidos. Apresenta a tua resposta na forma de dízima (fazendo a conta na calculadora, se necessário).

1.
- $\text{FA}(x) = 7$
- $\text{FA}_{\text{Total}} = 10$
- Calcula $\text{FR}(x)$

2.
- $\text{FA}(x) = 22$
- $\text{FA}_{\text{Total}} = 25$
- Calcula $\text{FR}(x)$

3.
- $\text{FR}(x) = 0{,}88$
- $\text{FA}_{\text{Total}} = 25$
- Calcula $\text{FA}(x)$

4.
- $\text{FR}(x) = 0{,}88$
- $\text{FA}(x) = 22$
- Calcula FA_{Total}

5.
- $\text{FA}(x) = 9$
- $\text{FA}_{\text{Total}} = 40$
- Calcula $\text{FR}(x)$

6.
- $\text{FR}(x) = \frac{2}{7}$
- $\text{FA}(x) = 24$
- Calcula FA_{Total}

7.
- $\text{FR}(x) = 37{,}5\%$
- $\text{FA}_{\text{Total}} = 200$
- Calcula $\text{FA}(x)$

Nota: Garante que sabes fazer contas com as 3 grandes formas de representar números (**fração, percentagem, e dízima**).

$$50\% = \frac{50}{100} = 0{,}5$$

Nota: Lembra-te que 50 "por cento" é 50 "por cem", ou seja,

$$50\% = \frac{50}{100}$$

Exemplo:

- $\text{FR}(x) = 0{,}3$
- $\text{FA}_{\text{Total}} = 10$
- Calcula $\text{FA}(x)$

Queres $\text{FA}(x)$? Então precisas de 1 equação com $\text{FA}(x)$.

Qual equação? Queres $\text{FA}(x)$ e tens $\text{FR}(x)$ e FA_{Total}.

Que equação relaciona isto tudo? É a equação da Frequência Relativa!

$$\begin{aligned}\text{FR}(x) &= \frac{\text{FA}(x)}{\text{FA}_{\text{Total}}}\\ \Leftrightarrow 0{,}3 &= \frac{\text{FA}(x)}{10}\\ \Leftrightarrow \text{FA}(x) &= 0{,}3 \times 10\\ \Leftrightarrow \text{FA}(x) &= 3\end{aligned}$$

Resolução (pág. 51)

*Frequência Relativa? É **Probabilidade**! (Casos Favoráveis sobre Casos Possíveis, ou seja, Frequência Absoluta sobre Frequência Absoluta Total)*

*E claro, a **Frequência Relativa é uma equação** (que relaciona $\text{FR}(x)$, $\text{FA}(x)$ e FA_{Total}). Por* *isso, se queres 1 dessas incógnitas, é só saberes as outras incógnitas. Porque lembra-te: se queres 1 incógnita, precisas de 1 equação com essa incógnita (e a equação da frequência relativa pode ser essa equação).*

1.1.2.2 Como traduzir entre Frequências Absolutas e Relativas na Tabela? (Preencher Espaços, resolvendo Equações)

Exercício 1.5

Se, nas Tabelas, podemos ter uma coluna para as Frequências Absolutas $\text{FA}(x)$, então também podemos ter uma coluna para as Frequências Relativas $\text{FR}(x)$.

x	$\text{FR}(x)$
Rosa	0,5
Azul	0,3
Verde	0,2

ou até

x	$\text{FA}(x)$	$\text{FR}(x)$
Rosa	20	0,5
Azul	12	0,3
Verde	8	0,2

Lembrando que, na Matemática, "se queres 1 incógnita, então precisas de 1 equação com essa incógnita", usa as 2 equações que já aprendeste (da FA_{Total} e da $\text{FR}(x)$), para preencher os espaços vazios das seguintes tabelas de frequências.

Dica: Começa sempre por calcular FA_{Total} (se não a tiveres).

1.

x	$\text{FA}(x)$	$\text{FR}(x)$
1	5	
2	7	
8	3	

2.

x	$\text{FA}(x)$	$\text{FR}(x)$
Rosa	27	
Azul	16	

3. $\text{FA}_{\text{Total}} = 30$

x	$\text{FR}(x)$	$\text{FA}(x)$
1	0,5	
2	1/6	
8	1/3	

4. $\text{FA}_{\text{Total}} = 40$

x	$\text{FR}(x)$	$\text{FA}(x)$
$[0,11[$	65%	
$[11,22[$	35%	

5.

x	$\text{FA}(x)$	$\text{FR}(x)$
5	6	0,3
9		0,2
13		0,5

Exemplo:

x	FA(x)
4	2
7	1
9	3

Calcula imediatamente FA_{Total} (e coloca na tabela)

- $\text{FA}_{\text{Total}} = 2 + 1 + 3 = 6$

x	FA(x)
4	2
7	1
9	3
	6

Calcula todas as Frequências Relativas (e coloca na tabela).

- $\text{FR}(4) = \dfrac{\text{FA}(4)}{\text{FA}_{\text{Total}}}$ $\Leftrightarrow \text{FR}(4) = \dfrac{2}{6}$
- $\text{FR}(7) = \dfrac{\text{FA}(7)}{\text{FA}_{\text{Total}}}$ $\Leftrightarrow \text{FR}(7) = \dfrac{1}{6}$
- $\text{FR}(9) = \dfrac{\text{FA}(9)}{\text{FA}_{\text{Total}}}$ $\Leftrightarrow \text{FR}(9) = \dfrac{3}{6}$

x	FA(x)	FR(x)
4	2	2/6
7	1	1/6
9	3	3/6
	6	1

E como $\text{FR}_{\text{Total}} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = 1$, então deve estar certo.

Nota: As Frequências Relativas são muito especiais porque

$$\boxed{\text{FR}_{\text{Total}} = 1}$$

Ou, se preferires algo mais explícito,

$$\boxed{\text{FR}(x_1) + \text{FR}(x_2) + \cdots + \text{FR}(x_n) = 1}$$

onde $x_1, x_2, \cdots, x_n$ são todos os dados do teu conjunto.
De facto, isto é **muito útil para verificar que calculaste bem as Frequências Relativas** (ou também para usar como uma equação para completar a tabela)

Por curiosidade, esta equação da FR_{Total} é equivalente à equação da FA_{Total} (basta dividires ou multiplicares dos 2 lados por FA_{Total}):

$$\text{FA}(x_1) + \text{FA}(x_2) + \cdots + \text{FA}(x_n) = \text{FA}_{\text{Total}}$$

Resolução (pág. 52)

Preencher Tabelas? 2 Passos:

1. *Calcula FA_{Total} (usando a equação da FA_{Total} ou do $\text{FR}(x)$)*

2. *E agora já podes calcular qualquer* $\mathrm{FA}(x)$ *a partir de* $\mathrm{FR}(x)$ *e vice-versa! (usando a equação do* $\mathrm{FR}(x)$*)*

Lembra-te: ***se queres 1 incógnita, então precisas de 1 equação*** *com essa incógnita.*

Por isso, sabe muito bem as 3 equações que podes usar e conseguirás calcular qualquer incógnita!

1.2 Treino 2: Medidas de Localização e Dispersão

Graças à nossa investigação até agora, já percebemos que para trabalhar com frequências só precisamos de usar tabelas (porque todas as outras formas de representar podem ser transformadas em tabelas).

De facto, já vimos tudo o que há para aprender sobre Frequências, ou seja, sobre "contar quanto há de cada dado"). As Frequências são essenciais porque **tratar dados em Estatística começa sempre por contar a frequência de cada dado**. Mas, depois, na maioria das vezes, não ficamos por aí e **queremos também resumir esses dados**.

Temos então a grande questão: como resumir todos esses dados?

E a ideia genial é perceberes que, para resumires um conjunto de dados, só precisas de 2 números: um **valor central** e um **valor que indica o possível desvio desse valor central**.

Por exemplo, para resumires as idades de todos os alunos de uma escola, podes apenas dizer:

$$16 \pm 3 \text{ anos}$$

Lá está: 16 é o teu valor central, e 3 é o valor que indica o desvio desse valor central.

E percebendo isto, ao longo dos tempos, fomos desenvolverndo:

- **Medidas de Localização**: ou seja, diferentes maneiras de definir ("localizar") um valor central (por exemplo, moda, média, mediana)
- **Medidas de Dispersão**: ou seja, diferentes maneiras de definir o desvio ("dispersão") em relação a esse valor central (por exemplo, amplitude, desvio padrão/variância, amplitude interquartil)

E depois de eu ter aprendido todas estas medidas, agora, **posso-te mostrar esta tabela que mostra como eu organizo todas as medidas na minha memória**.

	Localização	**Dispersão**
Básico	Moda	Amplitude (e Mínimo/Máximo)
Popular	Média	Desvio Padrão (e Variância)
Alternativa	Percentis (inclui Mediana e Quartis)	Amplitude Interquartil

Por mera curiosidade, porquê os nomes "Básico", "Popular" e "Alternativa"?

- Moda e Amplitude são **básicos**, porque são ensinados primeiro, ainda na escola primária
- Média e Desvio Padrão são **populares**, porque são os mais utilizados em Estatística
- Mediana (Percentis) e Amplitude Interquartil são **alternativas**, porque às vezes são utilizados como alternativa à média e ao desvio padrão, por serem pouco afetados por valores atípicos (ou seja, valores muito maiores ou menores que os restantes valores), ao contrário do que acontece com a média e desvio padrão, que são muito afetados por valores atípicos.

É assim que eu organizo na minha memória. E tu, organiza na tua memória da forma que te der mais jeito (ou esta ou qualquer outra).

1.2.1 Básico Localização: Moda

Exercício 1.6

Sabendo que

$$\boxed{\text{Moda} = \text{Dado que aparece mais vezes que os outros}}$$

para cada um dos seguintes conjuntos de dados, indica a sua moda (ou modas) ou diz que não há moda (é amodal).

1.

x	FA(x)
França	77
Itália	89
China	121
Japão	57

2.

x	FR(x)
França	0,27
Itália	0,32
China	0,31
Japão	0,1

3.

x	FR(x)
França	25%
Itália	25%
China	25%
Japão	25%

4.

x	FA(x)
França	28
Itália	19
China	14
Japão	28

5.

x	FR(x)
$[0,7[$	32%
$[7,14[$	32%
$[14,21[$	4%
$[21,28[$	0,32

6.

x	FR(x)
5	$5/24$
12	$1/3$
20	$1/6$
37	$7/24$

Exemplo: É só escolheres os dados que aparecem mais vezes que os outros (ou seja, com **mais frequência absoluta/relativa que os outros**)

1.

x	FR(x)
Rosa	0,5
Azul	0,1
Verde	0,15
Preto	0,25

Moda = Rosa

3.

x	FA(x)
Rosa	12
Azul	12
Verde	12
Preto	6

Moda = Rosa, Azul, Verde

2.

x	FA(x)
Rosa	12
Azul	8
Verde	10
Preto	6

Moda = Rosa

4.

x	FA(x)
Rosa	12
Azul	12
Verde	12
Preto	12

Não há moda (Amodal)

Nota: Para comparar números em diferentes formas, como

$$0{,}2 \quad 22\% \quad \frac{1}{4}$$

o mais fácil é **colocá-los primeiro todos na mesma forma** (por exemplo, colocá-los todos na forma de dízima, calculando-os na calculadora):

$$0{,}2 \quad 0{,}22 \quad 0{,}25$$

Agora sim, é fácil compará-los!

Nota: Muitas vezes, em vez de escrever "Moda", escrevemos M_o

Nota: Quando os nossos dados são números ou intervalos, às vezes chamamos a esses dados **"classes"**. Por isso, quando os nossos dados são números ou intervalos, às vezes, em vez de dizer "moda", dizemos **"classe modal"**. Mas é tudo a mesma coisa.

Nota: A moda é importante porque **é a única medida que funciona com dados que são palavras**. Todas as outras medidas envolvem fazer cálculos numéricos e, por isso, só funcionam com números e intervalos.

Nota: Por curiosidade (pouco provável sair em exame), as vezes damos nomes ao nosso conjunto de dados dependendo do seu número de modas: **Amodal** (0 modas), **Unimodal** (1 moda), **Bimodal** (2 modas), **Multimodal/Plurimodal** (3 ou mais modas).

Resolução (pág. 53)

Moda? É o dado que ***aparece mais vezes que os outros****! (ou seja, com mais frequência absoluta/relativa que os outros)*

E lembra-te: ***pode haver qualquer número de modas*** *(até pode não haver moda, ou seja, ser amodal).*

(e não interessa se os dados são palavras, numeros ou intervalos — a lógica é a mesma para todos!)

1.2.2 Básico Dispersão: Amplitude (e Mínimo e Máximo)

1.2.2.1 Para Números

Exercício 1.7

Sabe-se que

$$\boxed{\text{Amplitude} = \text{Máximo} - \text{Mínimo}}$$

onde o "Máximo" é o maior dos dados e o "Mínimo" é o menor dos dados.

Para cada um dos seguintes conjuntos de dados, usando a equação da Amplitude, calcula o valor pedido.

1. Amplitude

x	FA(x)
10	77
18	89
38	121
59	57

2. Amplitude

x	FR(x)
10	0,27
18	0,32
38	0,31
59	0,1

3. Amplitude

x	FR(x)
10	0,27
18	0,32
38	0,31
44	0,04
57	0,05
59	0,01

4. a, sabendo que Amplitude é 49

x	FA(x)
10	77
18	89
38	121
a	57

5. a, sabendo que Amplitude é 49

x	FA(x)
a	77
18	89
38	121
59	57

6. Espaço Vazio, sabendo que Amplitude é 49

x	FA(x)
	77
18	89
38	121
59	57

7. Amplitude

x	FR(x)
5	5/24
12	1/3
20	1/6
37	7/24

8. Espaço Vazio, sabendo que Amplitude é 213

x	FR(x)
120	32%
132	26%
154	22%
177	6%
230	10%
	4%

Exemplo:

1. Amplitude

x	FA(x)
4	12
9	8
15	6

Queremos "Amplitude", por isso precisamos de 1 equação com "Amplitude". Qual equação? Queremos Amplitude, e temos Máximo e Mínimo, por isso é a equação que relaciona isso tudo: a equação da Amplitude.

$$\begin{aligned} &\text{Amplitude} = \text{Máximo} - \text{Mínimo} \\ \Leftrightarrow &\text{Amplitude} = 15 - 4 \\ \Leftrightarrow &\text{Amplitude} = 11 \end{aligned}$$

2. Espaço vazio, sabendo que Amplitude é 11.

x	FR(x)
4	0,5
9	0,35
	0,15

Queremos espaço vazio, por isso chamamos a ao espaço vazio.

x	FR(x)
4	0,5
9	0,35
a	0,15

Queremos a (o Máximo), por isso precisamos de 1 equação com a. Qual equação? Queremos Maximo, e temos Amplitude e Mínimo, por isso é a equação que relaciona isso tudo: a equação da Amplitude.

$$\begin{aligned} &\text{Amplitude} = \text{Máximo} - \text{Mínimo} \\ \Leftrightarrow &11 = a - 4 \\ \Leftrightarrow &a = 15 \end{aligned}$$

Resolução (pág. 54)

Amplitude? É Máximo–Mínimo (ou seja, Maior–Menor)

(E não interessa se é Frequência Absoluta ou Relativa — só interessa que os dados x estejam por ordem)

1.2.2.2 Para Intervalos

Exercício 1.8

Se os teus dados são intervalos (em vez de números, como acontecia no exercício anterior), então a equação da Amplitude é a mesma.

$$\boxed{\text{Amplitude} = \text{Máximo} - \text{Mínimo}}$$

A única diferença é que o "Máximo" é o **maior valor do teu "maior" intervalo** e o "Mínimo" é o **menor valor do teu "menor" intervalo**.

Sabendo isto, para cada um dos seguintes conjuntos de dados, e usando a equação da Amplitude, calcula o valor pedido.

1. Amplitude

x	FA(x)
$[5,9[$	77
$[9,13[$	89
$[13,17[$	121
$[17,21[$	57

2. Amplitude

x	FR(x)
$[10,12[$	0,27
$[12,14[$	0,32
$[14,16[$	0,31
$[16,18[$	0,04
$[18,20[$	0,05
$[20,22[$	0,01

3. a, sabendo que Amplitude é 35

x	FA(x)
$[2,9[$	77
$[9,16[$	89
$[23,30[$	121
$[30,a[$	57

4. a, sabendo que Amplitude é 72

x	FR(x)
$[a,41[$	32%
$[41,53[$	26%
$[53,65[$	22%
$[65,77[$	6%
$[77,89[$	10%
$[89,101[$	4%

Exemplo:

1. Amplitude

x	FA(x)
$[1,4[$	12
$[4,7[$	8
$[7,10[$	6

Queremos "Amplitude", por isso precisamos de 1 equação com "Amplitude". Qual equação? Queremos Amplitude, e temos Máximo e Mínimo, por isso é a equação que relaciona isso tudo: a equação da Amplitude.

$$\begin{aligned} &\text{Amplitude} = \text{Máximo} - \text{Mínimo} \\ \Leftrightarrow &\text{Amplitude} = 10 - 1 \\ \Leftrightarrow &\text{Amplitude} = 9 \end{aligned}$$

2. a, sabendo que Amplitude é 9.

x	FR(x)
$[1,4[$	0,5
$[4,7[$	0,35
$[7,a[$	0,15

Queremos a (o Máximo), por isso precisamos de 1 equação com a. Qual equação? Queremos Maximo, e temos Amplitude e Mínimo, por isso é a equação que relaciona isso tudo: a equação da Amplitude.

$$\begin{aligned} &\text{Amplitude} = \text{Máximo} - \text{Mínimo} \\ \Leftrightarrow &9 = a - 1 \\ \Leftrightarrow &a = 10 \end{aligned}$$

Resolução (pág. 54)

Amplitude para Intervalos? Também é Máximo−Mínimo (só que o Máximo é o ***maior valor do "maior" intervalo*** *e o Mínimo é o* ***menor valor do "menor" intervalo****)*

1.2.3 Popular Localização: Média

1.2.3.1 Para Números

Exercício 1.9

Sabe-se que a **Média** é **o total dos dados e dividir pelo número de dados**, ou seja,

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\text{Total dos Dados}}{\text{Número de Dados}}}$$

onde $\bar{x}$ significa "Média" (Dica: lembra-te que é só meter um traço por cima do x, que faz lembrar o traço da fração na equação da média).

Pessoalmente, gosto de escrever

$$\boxed{\bar{x} = \frac{x_{\text{Total}}}{\text{FA}_{\text{Total}}}}$$

onde x_{Total} é o total dos dados x.
Ou, se preferires algo mais explícito,

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\text{FA}(x_1)x_1 + \cdots + \text{FA}(x_n)x_n}{\text{FA}(x_1) + \cdots + \text{FA}(x_n)}}$$

onde $x_1, x_2, \cdots, x_n$ são todos os dados **diferentes** do teu conjunto.

Para cada um dos seguintes conjuntos de dados, usando a equação da Média, calcula o valor pedido. Se o resultado não for um número inteiro, deixa-o na forma de fração.

1. Média $\bar{x}$

x	FA(x)
1	7
3	2
6	3
20	5

2. Média $\bar{x}$

x	FA(x)
1	2
2	11
8	7

3. a, sabendo que a Média $\bar{x}$ é 4

x	FA(x)
1	2
a	11
8	7

4. Espaço Vazio, sabendo que a Média $\bar{x}$ é 4

x	FA(x)
1	2
2	11
8	

5. a, sabendo que a Média $\bar{x}$ é $\frac{5}{2}$

x	FA(x)
1	a
3	3
$2a$	1

6. Média $\bar{x}$, sabendo que FA$_{\text{Total}}$ é 200

x	FR(x)
10	0,35
20	0,25
30	0,4

Dica: cria primeiro a coluna das Frequências Absolutas

Exemplo:

1. Média

x	FA(x)
4	2
7	1
9	3

Queremos Média $\bar{x}$, por isso precisamos de 1 equação com Média $\bar{x}$. Qual equação? Queremos Média $\bar{x}$, e temos dados x e frequências absolutas FA(x), por isso é a equação que relaciona isso tudo: a equação da Média $\bar{x}$.

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x_{\text{Total}}}{\text{FA}_{\text{Total}}} \\ \Leftrightarrow \bar{x} &= \frac{2\times 4+1\times 7+3\times 9}{2+1+3} \\ \Leftrightarrow \bar{x} &= \frac{42}{6} \\ \Leftrightarrow \bar{x} &= 7 \end{aligned}$$

2. Espaço vazio, sabendo que Média é 7.

x	FA(x)
4	2
7	1
9	

Queremos espaço vazio, por isso chamamos a ao espaço vazio.

x	FA(x)
4	2
7	1
9	a

Queremos a (uma Frequência Absoluta), por isso precisamos de 1 equação com a. Qual equação? Queremos uma Frequência Absoluta, e temos Média, por isso é a equação que relaciona isso tudo: a equação da Média.

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x_{\text{Total}}}{\text{FA}_{\text{Total}}} \\ \Leftrightarrow 7 &= \frac{2\times 4+1\times 7+a\times 9}{2+1+a} \\ \Leftrightarrow 7 &= \frac{15+9a}{3+a} \\ \Leftrightarrow 21+7a &= 15+9a \\ \Leftrightarrow a &= 3 \end{aligned}$$

Resolução (pág. 55)

Média $\bar{x}$? É o ***total dos dados a dividir pelo número de dados****!*

E lembra-te: a equação da média gosta de frequências absolutas simples (por isso, ***se tiveres outras frequências, passa-as primeiro a frequência absoluta simples****).*

1.2.3.2 Para Intervalos

Exercício 1.10

Se os teus dados são intervalos (em vez de números, como acontecia no exercício anterior), então a equação da Média é a mesma.

$$\boxed{\bar{x} = \frac{x_{\text{Total}}}{\text{FA}_{\text{Total}}}}$$

A única diferença é que os dados x que vais usar na equação não são os intervalos, mas sim o **ponto médio de cada intervalo**.

$x_{\text{médio}}$	x	$FA(x)$
2,5	$[0,5[$	2
7,5	$[5,10[$	1
12,5	$[10,15[$	2

Sabendo isto, para cada um dos seguintes conjuntos de dados, e usando a equação da Média, calcula o valor pedido. Se o resultado não der um número finito, deixa-o na forma de fração.

1. Média $\bar{x}$

x	$FA(x)$
$[1,5[$	2
$[5,9[$	4
$[9,13[$	1
$[13,17[$	3

2. Média $\bar{x}$

x	$FA(x)$
$[0,7[$	10
$[7,14[$	8
$[14,21[$	1

3. a, sabendo que a Média $\bar{x}$ é 10

x	$FA(x)$
$[0,8[$	4
$[8,16[$	2
$[16,24[$	a

Exemplo: Média $\bar{x}$

x	$FA(x)$
$[0,5[$	2
$[5,10[$	1
$[10,15[$	2

---

1. Primeiro, calculas o **ponto médio de cada intervalo** (é a média dos números inicial e final)

- $\dfrac{0+5}{2} = 2{,}5$
- $\dfrac{5+10}{2} = 7{,}5$
- $\dfrac{10+15}{2} = 12{,}5$

$x_{\text{médio}}$	x	$FA(x)$
2,5	$[0,5[$	2
7,5	$[5,10[$	1
12,5	$[10,15[$	2

2. E agora, aplicas a **equação da média** como sempre usando esses pontos médios.

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{x_{\text{Total}}}{FA_{\text{Total}}} \\
\Leftrightarrow \bar{x} &= \frac{2 \times 2{,}5 + 1 \times 7{,}5 + 2 \times 12{,}5}{2+1+2} \\
\Leftrightarrow \bar{x} &= \frac{37{,}5}{5} \\
\Leftrightarrow \bar{x} &= 7{,}5
\end{aligned}$$

Nota: A estes pontos médios de cada intervalo às vezes chamamos de **marcas de classe**, porque "marcam" cada classe, ou seja, cada intervalo.

Resolução (pág. 56)

Média para Intervalos? Também é $\frac{x_{Total}}{\mathrm{FA}_{Total}}$ *(só que na equação não usamos os intervalos, mas sim o* ***ponto médio de cada intervalo****).*

1.2.4 Popular Dispersão: Variância e Desvio Padrão

Por agora, não vou abordar como calcular variância e desvio padrão à mão (ou seja, não vou abordar essas equações) porque é **pouco provável sair em exame**.

Porém, **convém saberes calculá-los na calculadora**, que irás aprender mais à frente no capítulo Treino 3: Calcular Medidas na Calculadora.

E muito importante: se os teus dados são intervalos, então, tal como acontece na média, tu **consideras os pontos médios de cada intervalo**.

1.2.5 Alternativa Localização: Percentis (incluindo Mediana e Quartis)

1.2.5.1 Para Números

Exercício 1.11

Intuitivamente, os percentis são os números que **dividem os dados aproximidamente em** 100 **partes iguais.**

Para os identificar, escrevemos P_k, onde k pode ser $1,2,3,\cdots,100$ (e dizemos que são o "Percentil de ordem k").

O percentil mais importante de todos é o que divide os dados aproximidamente em 2 partes iguais. Chama-se **Mediana** (porque divide ao meio) e às vezes escreve-se M_e. Como a mediana está na posição 50%, então

$$\boxed{M_e = P_{50}}$$

Os outros percentis mais importantes são os 3 **quartis**, que dividem os dados aproximidamente em 4 partes iguais. Normalmente escrevem-se Q_1, Q_2, Q_3. Como os quartis estão nas posições $25\%, 50\%, 75\%$, então

$$\boxed{Q_1 = P_{25}, Q_2 = M_e = P_{50}, Q_3 = P_{75}}$$

E o último percentil especial é o P_{100}, que é o Máximo.

$$\boxed{P_{100} = \text{Máximo}}$$

Se k não for 100, então P_k calcula-se em 2 Passos:

1. Cria a coluna das **Frequências Relativas Acumuladas** $\mathrm{FRac}(x)$ (se não a tiveres)
2. Onde está o $k\%$?
   - **"Dentro"** de um número? P_k é o **próprio** número.
   - **"Entre"** dois números? P_k é a **média** dos dois números.

Perceberás melhor quando vires o exemplo abaixo.

Sabendo isto, calcula os valores pedidos.

1. Calcula $Q_1, M_e, Q_3, P_{90}, P_{100}$

x	FRac(x)
2	0,25
3	0,4
5	0,5
8	0,85
12	1

2. Calcula $Q_1, M_e, Q_3, P_{90}, P_{100}$

x	FRac(x)
2	0,1
3	0,4
5	0,75
8	0,9
12	1

3. Calcula a, b, c, d, e, sabendo que $Q_1 = 4, M_e = 10{,}5, Q_3 = 15, P_{90} = 25, P_{100} = 42$.

x	FRac(x)
a	0,3
9	0,5
b	0,7
c	0,77
d	0,9
33	0,95
e	1

4. Calcula $Q_1, M_e, Q_3, P_{90}, P_{100}$

x	FA(x)
7	5
11	7
13	6
20	2

Exemplo:

x	FA(x)
4	2
7	1
9	3

Calcula:

- Q_1
- M_e
- Q_3
- P_{90}
- P_{100}

Primeiro, cria a coluna das **Frequências Relativas Acumuladas** (se não a tiveres).

x	FA(x)	FR(x)	FRac(x)
4	2	2/6	$2/6 \approx 0{,}33$
7	1	1/6	$3/6 = 0{,}50$
9	3	3/6	$6/6 = 1$
	6	1	

- $Q_1 = P_{25} = 4$
  (o 25% está **"dentro"** do 4 por isso é o **próprio**)
- $M_e = P_{50} = \dfrac{7+9}{2} = 8$
  (o 50% está **"entre"** o 7 e o 9, por isso é a **média** deles)
- $Q_3 = P_{75} = 9$
  (o 75% está **"dentro"** do 9 por isso é o **próprio**)
- $P_{90} = 9$
  (o 90% está **"dentro"** do 9 por isso é o **próprio**)
- $P_{100} = \text{Máximo} = 9$

Nota: Acima disse, divide "aproxidamente" em 100 partes iguais, porque, como os nossos dados são números, às vezes, não dão para dividir exatamente em blocos de 1% cada um.

Na prática, o que é verdade sim é que o percentil de ordem k, P_k, com $k = 1, 2, \ldots, 100$ é o número tal que:

- $\geq k\%$ dos dados são $\leq P_k$ (ou seja, $\mathrm{FRac}(P_k) \geq k\%$)
- $\geq (100-k)\%$ dos dados são $\geq P_k$

Por exemplo, P_{30} é o número tal que:

- $\geq 30\%$ dos dados são $\leq P_{30}$ (ou seja, $\mathrm{FRac}(P_{30}) \geq k\%$)
- $\geq 70\%$ dos dados são $\geq P_{30}$

E a nossa estratégia de cálculo cria um número exatamente com estas 2 características.

Nota: Esta nota é principalmente para **quem cria provas de avaliação**.

O percentil para números que mostro aqui é uma **definição equivalente à que está no Programa e Metas Curriculares de Matemática A** (Velho Programa), que é a definição oficial mais recente que temos e que também é a que aparece nos manuais escolares.

Com isto, **há 2 maneiras diferentes de calcular o 1.º e 3.º quartis:**

- Uma pelo percentil, que é a que mostro aqui
- Outra, que aprendes no 3.º Ciclo (e que as calculadoras normalmente usam), que envolve fazer primeiro a mediana dos dados todos para "partir os dados em 2 metades", e depois fazer a mediana de cada uma dessas 2 metades.

Estas 2 maneiras diferentes de calcular 1.º e 3.º quartis (ou percentil ou dupla mediana) **dão sempre o mesmo resultado, exceto quando o teu número total de dados $\mathrm{FA}_{\mathbf{Total}}$ é da forma $4n+1$**, em que n é um número natural qualquer.

Ou seja, se $\mathrm{FA}_{\mathrm{Total}} = 4n+1$, então estas 2 maneiras de calcular **darão diferentes resultados para o 1.º e 3.º quartis**.

Conclusão? Se criares provas de avaliação e escolheres um conjunto de dados em que o número total de dados é da forma $4n+1$, e pedires para calcular o 1.º e 3.º quartis, então **deves aceitar 2 possíveis respostas como corretas: 1 obtida pelo percentil, e outra obtida pela dupla mediana**. Ou então, apenas não faças esta pergunta.

Resolução (pág. 58)

Percentil para Números P_k? 2 Passos:

1. *Cria a coluna das* ***Frequências Relativas Acumuladas*** $\mathrm{FRac}(x)$

2. *Onde está o $k\%$?*

- ***"Dentro"*** *de um número? P_k é o* ***próprio*** *número.*
- ***"Entre"*** *dois números? P_k é a* ***média*** *dos dois números.*

E lembra-te da exceção: $P_{100} =$ Máximo.

E lembra-te também dos percentis mais populares (3 quartis e mediana):

- $Q_1 = P_{25}$
- $M_e = Q_2 = P_{50}$

- $Q_3 = P_{75}$

1.2.5.2 Para Intervalos

Por agora, não vou abordar o percentil para intervalos porque é **pouco provável sair em exame**.

1.2.6 Alternativa Dispersão: Amplitude Interquartil

1.2.6.1 Para Números

Exercício 1.12

Se a amplitude era a diferença entre o maior e o menor, então a **Amplitude Interquartil** é a **diferença entre o maior e menor quartis**, ou seja,

$$\boxed{\text{Amplitude Interquartil} = Q_3 - Q_1}$$

Para cada um dos seguintes conjuntos de dados, usando a equação da Amplitude Interquartil, calcula o valor pedido.

1. Calcula a Amplitude Interquartil

x	$\text{FRac}(x)$
2	0,1
8	0,18
11	0,4
12	0,75
19	1

2. Calcula a

x	$\text{FRac}(x)$
4	0,06
a	0,25
7	0,75
15	0,77
20	1

Exemplo: Calcula a Amplitude Interquartil

x	FRac(x)
2	0,25
3	0,4
5	0,5
8	0,85
12	1

$$\text{Amplitude Interquartil} = Q_3 - Q_1$$
$$\Leftrightarrow \text{Amplitude Interquartil} = 8 - 2{,}5$$
$$\Leftrightarrow \text{Amplitude Interquartil} = 5{,}5$$

Cálculos Auxiliares

x	FRac(x)
2	0,25
3	0,4
5	0,5
8	0,85
12	1

- $Q_1 = P_{25} = \frac{2+3}{2} = 2{,}5$
  (o 25% está **"entre"** o 2 e o 3, por isso é a **média** deles)
- $Q_3 = P_{75} = 8$
  (o 75% está **"dentro"** do 8 por isso é o **próprio**)

Resolução (pág. 60)

Amplitude Interquartil? É $Q_3 - Q_1$.

1.2.6.2 Para Intervalos

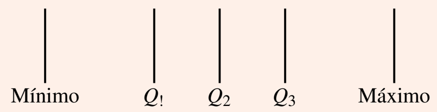
Calcular a Amplitude Interquartil para Intervalos é também $Q_3 - Q_1$. A única diferença é que calculas Q_3 e Q_1 **usando o percentil para intervalos**.

Mas, por agora, como não vou abordar o percentil para intervalos, então também não vou abordar a amplitude interquartil para intervalos.

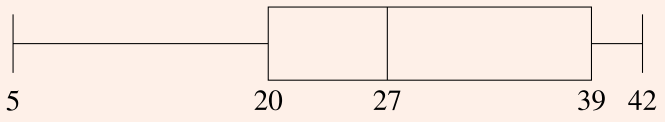
1.2.7 Diagrama de Extremos e Quartis (Forma de Representar Medidas)

Exercício 1.13

Uma ótima maneira de resumir dados é juntar os 2 extremos (Mínimo e Máximo) com os 3 Quartis (Q_1, Q_2, Q_3), para formar um resumo com 5 números (5 extremos e quartis)



Agora, se colocarmos esses 5 números na reta numérica, fazendo um traço vertical para cada número, e depois unirmos esses 5 traços com 4 linhas horizontais, então ficamos com um desenho como este.



A este desenho chamamos um **Diagrama de Extremos e Quartis** (porque lá está: é o diagrama que contém os extremos e os quartis).

Usando este diagrama de extremos e quartis, determina as seguintes medidas (ou diz que não é possível determiná-las):

1. A moda
2. A amplitude
3. A média $\bar{x}$, arredondada às décimas
4. A variância (amostral), arredondada às décimas
5. O desvio padrão (amostral) s, arredondada às décimas
6. O percentil de ordem 30, P_{30}
7. O percentil de ordem 75, P_{75}
8. O percentil de ordem 100, P_{100}
9. O 1.º quartil, Q_1
10. A mediana M_e
11. A amplitude interquartil

Exemplo: 3.º Quartil? É um quartil, por isso está no diagrama de extremos e quartis (é o 3.º traço da "parte gorda" do diagrama):

$$3.^{\text{o}} \text{ Quartil} = 39$$

Resolução (pág. 61)

*Diagrama de extremos e quartis? Ora, só tem os **extremos** (mínimo e máximo) e os **quartis** (Q_1, Q_2, Q_3). Daí o nome "diagrama de extremos e quartis"!*

*Por isso, se tiveres o diagrama, **só conseguirás calcular as medidas que usem os extremos ou os quartis.***

1.3 Exercícios Modelo 1: Sem Calculadora (Resolver Sistema de Equações)

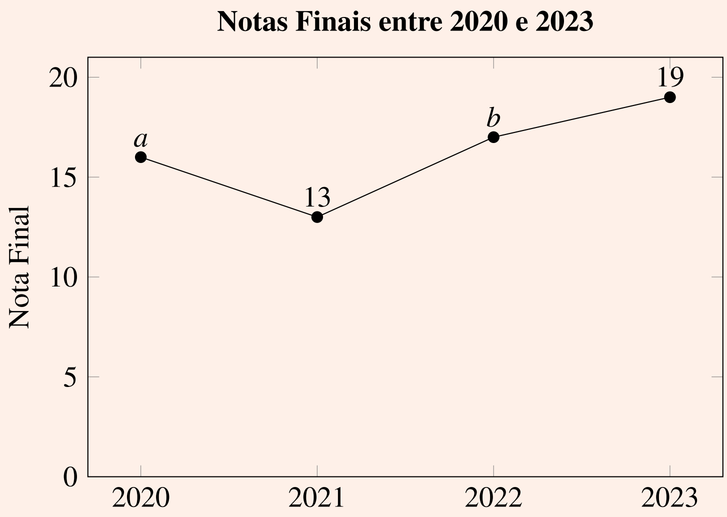
Estes exercícios podem ser apetecíveis de colocar em exame, apenas porque **não dão para resolver com a calculadora** (obrigando-te assim a saber mesmo as equações/fórmulas).

Aqui, calculadora é só para confirmares as tuas respostas (ou, se estiveres em particular desespero, tentares resolver os exercícios por tentativa e erro).

1.3.1 Mediana e Amplitude Interquartil

Exercício 1.14

No gráfico seguinte, estão representadas as notas finais, de 0 a 20, obtidas por um aluno entre 2020 e 2023.



Sobre as notas finais entre 2020 e 2023, sabe-se:

- A nota final mais alta foi em 2023, a mais baixa em 2021, e a nota de 2022 foi maior que a de 2020.
- A mediana das notas é 16,5
- A amplitude interquartil das notas é 3,5

Determina os valores de a, nota final de 2020, e b, nota final de 2022.

Resolução (pág. 62)

Lembra-te da Lei Fundamental da Matemática: "Se tens n incógnitas, então precisas de n equações com essas incógnitas!"

1.3.2 Média (2 Parciais, 1 Total)

Exercício 1.15

Um dia, uma turma dividiu-se em duas equipas (equipa A e equipa B) para recolher lixo numa floresta local.

Sabe-se que, nesse dia:

- a equipa A, constituída por 18 alunos, recolheu em média 4kg de lixo por aluno.
- a equipa B recolheu em média 5kg de lixo por aluno
- as duas equipas juntas recolheram em média 4,4kg de lixo por aluno.

Determina por quantos alunos era constituída a equipa B.

Resolução (pág. 63)

Lembra-te da Lei Fundamental da Matemática: "Se tens n incógnitas, então precisas de n equações com essas incógnitas!"

1.4 Treino 3: Calcular Medidas na Calculadora

Exercício 1.16

Para cada um dos seguintes conjuntos de dados, calcula estas 11 medidas

- moda, amplitude e 2 extremos (mínimo e máximo)
- 3 quartis (incluindo mediana) e amplitude interquartil
- média, desvio padrão (amostral) e variância (amostral), arredondados às centésimas.

1.

x	$\mathrm{FA}(x)$
1	10
6	18
10,5	12

2.

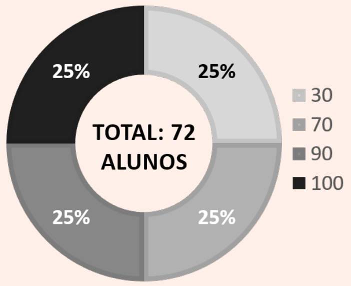
x	$\mathrm{FA}(x)$
3	3
7	4
11	4
15	2

3.

x	$\mathrm{FA}(x)$
$[1,5[$	3
$[5,9[$	4
$[9,13[$	4
$[13,17[$	2

Neste caso, **não calcules quartis (incluindo mediana) nem amplitude interquartil**, porque terias de usar a fórmula dos percentis para intervalos.

4.



Nota: Nas calculadores gráficas tradicionais, **não dá para calcular percentis (que não sejam quartis)** a partir das listas. Tens de calcular à mão.

Exemplo:

1.

x	FAac(x)
4	2
7	4
9	7
11	8

Primeiro, se não tiveres, **crias a coluna das Frequências Absolutas Simples**.

x	FAac(x)	FA(x)
4	2	2
7	4	2
9	7	3
11	8	1

1. Agora, vais às **"Listas de Estatística"** da tua calculadora, e copias os dados x e as frequências absolutas FA(x) para 2 listas (colunas) na calculadora.

2. Por fim, usas a funcionalidade **"Estatística de 1 Variável"** na tua calculadora. Selecionas corretamente a lista onde colocaste os dados x (normalmente, lista 1), e a lista onde colocaste as frequências FA(x) (normalmente, lista 2). Com isto, devem aparecer-te imensas medidas.

   Todas as calculadoras devem ter pelo menos as 7 grandes medidas abaixo (média e desvio padrão, 2 extremos e 3 quartis).

   - **Média:** $\bar{x} = 7{,}5$
   - **Desvio Padrão Amostral:** $s \approx 2{,}51$
   - **Mínimo:** $\min = 4$
   - **1º Quartil:** $Q_1 = 5{,}5$
   - **Mediana (2.º quartil):** $\text{Med} = 8$
   - **3º Quartil:** $Q_3 = 9$
   - **Máximo:** $\max = 11$

   E, depois, **calcula à mão qualquer medida que a tua calculadora não mostre**:

   - **Variância Amostral:** $\text{Variância} = s^2 \approx 6{,}29$ (Dica: neste cálculo, usa s com muitas casas decimais)
   - **Moda:** $\text{Moda} = 9$ (Dica: olha diretamente para as frequências absolutas simples FA(x) na tabela)
   - **Amplitude:** $\text{Amplitude} = \max - \min = 11 - 4 = 7$
   - **Amplitude Interquartil:** $\text{Amplitude Interquartil} = Q_3 - Q_1 = 9 - 5{,}5 = 3{,}5$

Exemplo:
2.

x	$\text{FAac}(x)$
$[0,20[$	4
$[20,40[$	1
$[40,60[$	3

---

1. Para inserir nas listas, **trocamos cada intervalo pelo ponto médio desse intervalo**:

x	$\text{FAac}(x)$
10	4
30	1
50	3

2. E calculamos as medidas fazendo a "Estatística de 1 Variável" na calculadora. Agora, cuidado: **como os dados são intervalos, só podemos calcular a média, desvio padrão e variância** na calculadora (porque só estes é que se calculam escolhendo o ponto médio de cada intervalo). Todas as outras medidas tens de calcular à mão (**usando as fórmulas para intervalos**).

Resolução (pág. 65)

Calcular Medidas na Calculadora? 2 Passos:

1. *Copia os dados x e frequências absolutas simples $\text{FA}(x)$ para **2 listas de Estatística***
2. *Usa a **"Estatística de 1 Variável"** para calculares as medidas (e calcula as restantes à mão).*

*E claro, se os teus dados estiverem noutra forma de representação, então passa-os para **Tabela de Frequências Absolutas Simples** (porque é isso que a calculadora gosta!)*

*E se os dados forem intervalos, **então só podes calcular a média, desvio padrão e variância** por lá.*

1.5 Exercícios Modelo 2: Com Calculadora

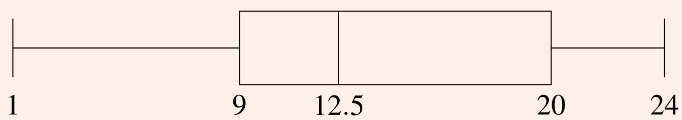
Estes exercícios (com calculadora) são os **mais prováveis de sair em exame** (exceto talvez o segundo exercício, que é de percentil, que suspeito que seja pouco provável sair).

Ou seja, **garante que sabes muito bem calcular todas as medidas na calculadora**!

1.5.0.1 Tens Dados, Queres Medidas (Escolha Múltipla)

Exercício 1.17

O diagrama de extremos e quartis seguinte representa um conjunto de dados.



Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A amplitude é 11 **(B)** O 1.º quartil é 1

(C) O 3.º quartil é 20 **(D)** A amplitude interquartil é 12,5

Resolução (pág. 67)

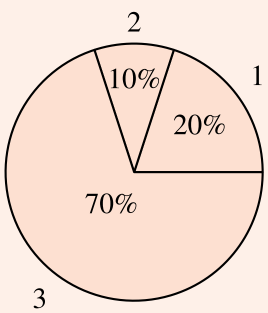
Diagrama de extremos e quartis? Tens os 2 extremos e os 3 quartis!

1.5.0.2 Tens Dados, Queres Medidas: Percentil (Escolha Múltipla)

Exercício 1.18

Num inquérito a alunos de uma escola, perguntaram: "De entre os números 1, 2 e 3, qual é o teu número preferido?"

O gráfico circular seguinte representa os dados registados.



Qual é o percentil de ordem 30 deste conjunto de dados?

(A) 1,5 **(B)** 2 **(C)** 2,5 **(D)** 3

Resolução (pág. 67)

2 lembretes importantes:

- ***O percentil não é um quartil? Então não dá para ver na calculadora***. *Tens de calcular à mão.*
- *O percentil calcula-se de forma diferente se os teus dados forem números e ou se forem intervalos.*

1.5.0.3 Tens Medidas, queres Dados (Escolha Múltipla)

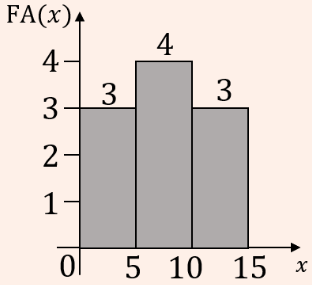
Exercício 1.19

Para uma certa amostra, sabe-se que a sua média é 7,5 e que o seu desvio padrão, arredondado às centésimas, é 4,08.

Qual dos quatro seguintes conjuntos de dados pode representar os dados desta amostra?

Nota: No diagrama de caule e folhas da opção **(B)**, o algarismo das dezenas é indicado no caule e o algarismo das unidades é indicado nas folhas.

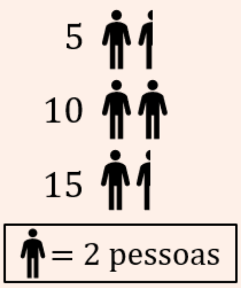
(A)



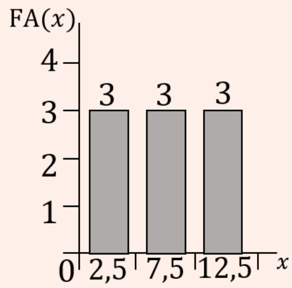
(B)

0	1	1	1	1	5
1	1	1	2	2	
2	0				

(C)



(D)



Resolução (pág. 68)

2 lições importantes:

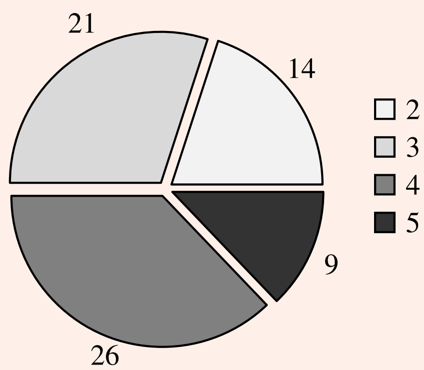
- *Lembra-te como calcular média e desvio padrão quando os teus dados são intervalos*
- *E, na calculadora, lembra-te de qual é o símbolo certo para a média e desvio padrão* ***de uma amostra***

1.5.0.4 Tens Dados, Queres Medidas (Completar Frases)

Exercício 1.20

De uma amostra de 70 alunos de uma escola do Ensino Básico, registaram-se as suas notas finais, de 2 a 5, na disciplina de Matemática em 2024.

O gráfico circular seguinte representa os dados registados.



Completa o texto seguinte, selecionando a opção adequada a cada espaço.

Escreve na folha de respostas cada um dos números, **I**, **II**, **III**, **IV** que lhe corresponde, seguido da opção **a)**, **b)** ou **c)** que lhe corresponde. A cada espaço corresponde uma só opção.

Os alunos que tiveram nota final 4 representam, com arredondamento às unidades, aproximadamente __**I**__ % da amostra.
A moda, média e mediana das notas finais obtidas, ordenadas por ordem crescente, é __**II**__.
A variância das notas finais obtidas é __**III**__ desvio padrão das notas finais obtidas.
A amplitude do ângulo ao centro, em graus, correspondente ao setor circular relativo ao número de alunos que tiveram nota final 2 é __**IV**__.

I	**II**	**III**	**IV**
a) 26	**a)** Média, Mediana, Moda	**a)** maior que o	**a)** 20
b) 37	**b)** Mediana, Média, Moda	**b)** igual ao	**b)** 72
c) 38	**c)** Moda, Média, Mediana	**c)** menor que o	**c)** 78

Resolução (pág. 69)

- *No fundo, este exercício é 4 escolhas múltiplas em 1!*
- *E sempre que puderes, usa a calculadora (é mais rápido!)*

2. Estatística com 2 Variáveis

Nota: Se noutras fontes vires as palavras **"Distribuições/Dados/Amostras Bidimensionais/Bivariadas"**, tudo isso significa "Estatística com 2 variáveis", ou seja, "Estatística com 2 conjuntos de dados relacionados".

Na vida real, é completamente natural **querermos perceber se** 2 **variáveis estão relacionadas**:

- será que estudar mais tempo está relacionado com ter melhores notas?
- será que acordar e deitar todos os dias à mesma hora está relacionado com maior concentração durante o dia?
- será que ter mais dinheiro está relacionado com maior felicidade?

O problema é que normalmente é difícil responder a estas perguntas. Mas e **se tivermos dados concretos, será que a Matemática nos consegue ajudar**? E foi para isto que nós, seres humanos, desenvolvemos métodos de Estatística com 2 variáveis.

Neste capítulo, irás aprender o método mais simples da Estatística com 2 variáveis.

2.1 Treino 1: Diagrama de Dispersão (ou Nuvem de Pontos)

Em qualquer matéria de Matemática, há sempre um desenho que podes fazer. No caso da Estatística de 2 variáveis, esse desenho chama-se **"diagrama de dispersão" (ou "nuvem de pontos")**.

E para que serve este diagrama de dispersão? Serve para **perceberes logo se pode ou não pode haver uma relação entre as** 2 **variáveis** (para depois decidires que métodos estatísticos irás utilizar).

2.1.1 Como criar o Diagrama de Dispersão

2.1.1.1 Queres Diagrama, Tens Coordenadas

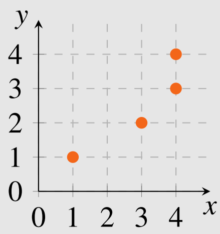
Exercício 2.1

Considera o seguinte conjunto de dados com 2 variáveis (coordenadas (x,y)).

$$(1,1) \quad (1,4) \quad (3,0) \quad (4,3) \quad (5,2)$$

Desenha o respetivo diagrama de dispersão (é só desenhares os 5 pontos que têm estas coordenadas (x,y)).

Exemplo: $(1,1)$ $(4,3)$ $(3,2)$ $(4,4)$



Resolução (pág. 71)

Dados com 2 variáveis? São coordenadas (x,y)
Diagrama de dispersão? É desenhar esses (x,y)

2.1.1.2 Queres Diagrama, Tens Tabela

Exercício 2.2

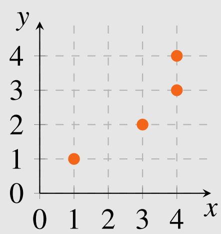
Considera a tabela ao lado com dados de 2 variáveis x,y.

Desenha o respetivo diagrama de dispersão (é só desenhares os 5 pontos que têm estas coordenadas (x,y)).

x	y
5	5
5	3
3	2
4	0
1	3

Exemplo:

x	y
1	1
4	3
3	2
4	4



Resolução (pág. 71)

Tabela? É outra maneira de organizar os teus dados (x,y)
Diagrama de dispersão? É desenhar esses (x,y)

2.1.1.3 Calculadora: Queres Diagrama, tens Coordenadas ou Tabela

Exercício 2.3

Para cada um dos seguintes conjuntos de dados de 2 variáveis (x,y), copia esses dados (x,y) para 2 listas na calculadora e visualiza o respetivo diagrama de dispersão na calculadora.

1.

x	y
1	2
6	4
3,2	5
14	11
9	10
20	16,9

2. $(2;\ 38)$ $(12;\ 13)$ $(14;\ 19)$ $(7;\ 21)$ $(9;\ 27)$ $(6;\ 30{,}7)$ $(10{,}5;\ 20)$

Nota: Às vezes escrevemos $(x;y)$ em vez de (x,y) (com ponto e vírgula em vez de vírgula), especialmente para não haver confusões entre vírgulas quando o x ou y tiverem vírgulas.

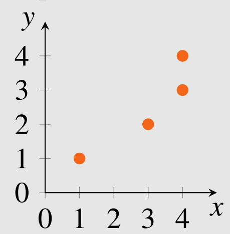
Nota: Se não souberes copiar os dados para as listas ou visualizar o diagrama na tua calculadora, então **pesquisa** (ou no teu manual de Matemática, ou nas instruções da calculadora, ou na internet).

Exemplo: $(1,2)$ $(3,1)$ $(2,4)$ $(4,4)$

Primeiro, inserimos os dados em 2 listas (colunas) na calculadora, tal como estão nesta tabela.

x	y
1	1
4	3
3	2
4	4

Depois visualizamos o diagrama de dispersão na calculadora.



Resolução (pág. 71)

Diagrama de dispersão na calculadora? Copia para as listas! (uma lista para os x, outra lista para os y)

2.1.2 Classificar Correlação Linear

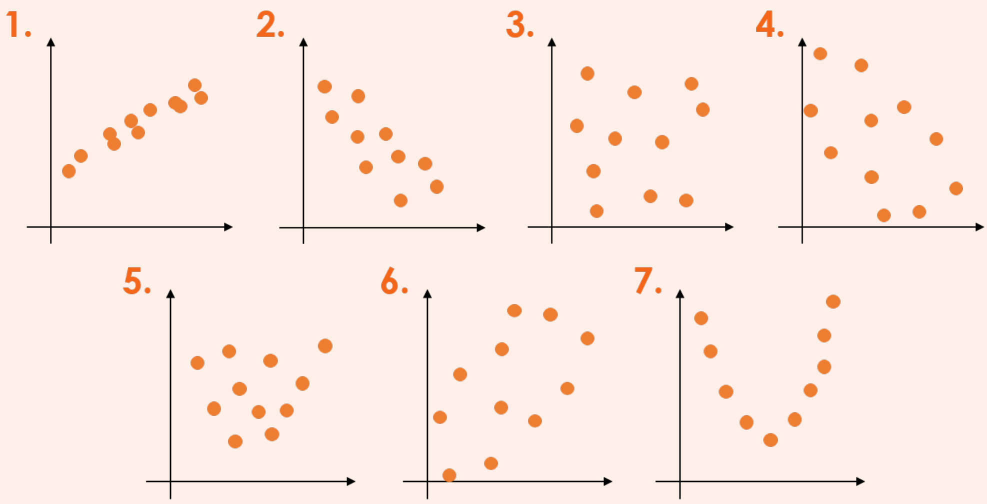
2.1.2.1 Correlação Linear: há ou não há/é nula

Exercício 2.4

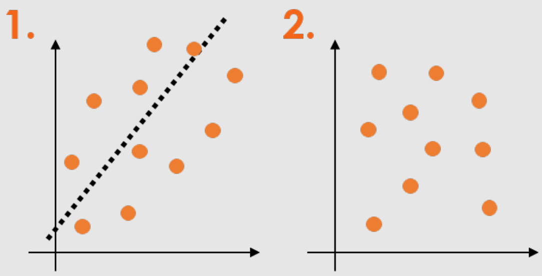
Sabe-se que:

- se os pontos do diagrama se **juntam à volta de uma linha reta**, então **há correlação linear**
- se **NÃO**, então **NÃO há correlação linear** (é correlação **nula**)

Sabendo isto, para cada um dos diagramas de dispersão seguintes, indica se há ou não há correlação linear.



Exemplo:



Há Correlação Linear

Não há Correlação Linear (é Correlação **Nula**)

Nota:

- Por curiosidade (porque ninguém te deverá perguntar isto), se os pontos se juntarem todos à volta de uma **reta vertical ou horizontal**, então também **não há correlação** (é correlação **nula**).
- Isto acontece porque **haver correlação entre** x **e** y **significa que** x **afeta** y **e** y **afeta** x (mas em retas verticais ou horizontais, o x ou o y são constantes, ou seja, não são afetados pela outra variável y ou x respetivamente – por isso, não há correlação).
- Conclusão? **Só há correlação** quando os pontos se juntam à volta de retas não verticais e não horizontais, ou seja, **retas oblíquas** (diagonais). Por isso é que só essas é que aperecem nestes exercícios.

Resolução (pág. 71)

Os pontos juntam-se à volta de uma reta?

- *Sim: há correlação.*
- *Não: não há correlação (é nula).*

2.1.2.2 Direção/Tipo da Correlação: positiva ou negativa

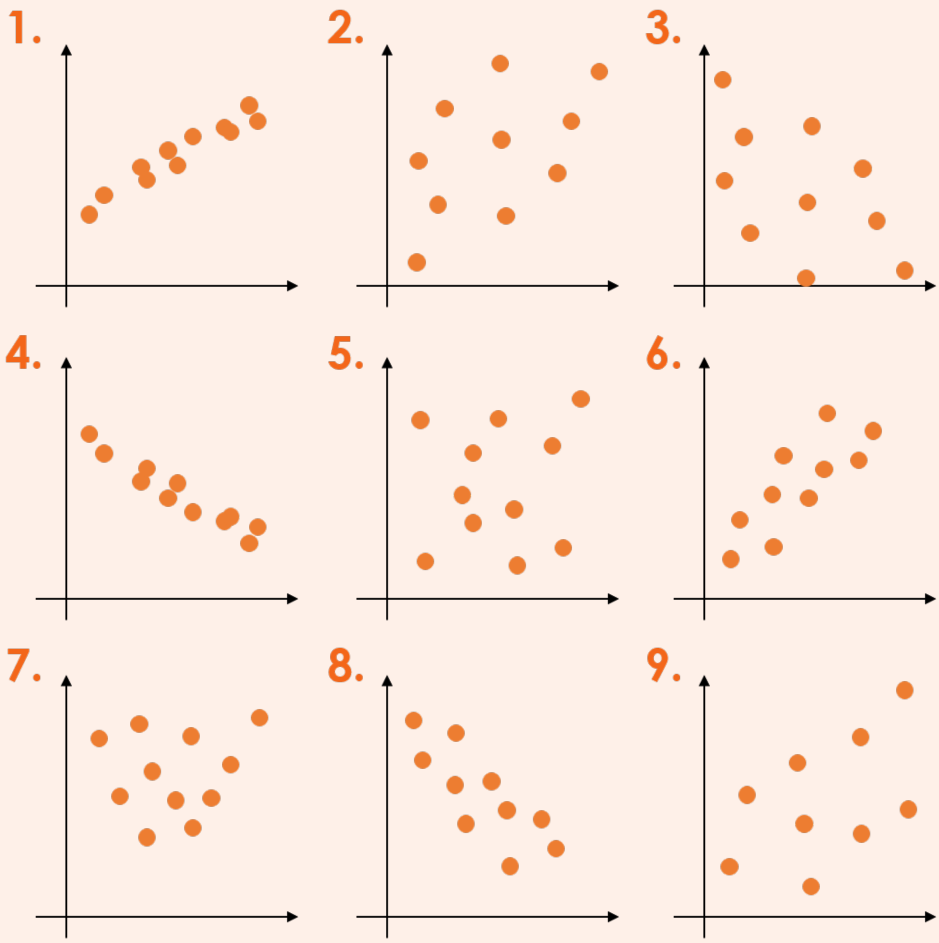
Exercício 2.5

Se houver correlação, ou seja, se os pontos se juntam à volta de uma reta, então o declive dessa reta pode ser positivo ou negativo (ou seja, olhando da esquerda para a direita, essa reta pode estar a "subir" ou a "descer").

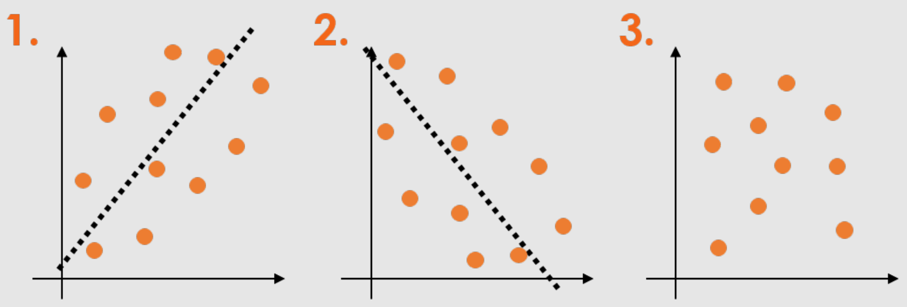
- Declive positivo? É correlação **positiva**
- Declive negativo? É correlação **negativa**

Sabendo isto, para cada um dos diagramas de dispersão seguintes:

- se houver correlação, classifica essa correlação quanto à direção (**positiva ou negativa**).
- Se não houver correlação, indica que é **nula**.



Exemplo:



Correlação **Positiva** Correlação **Negativa** Correlação **Nula**

Resolução (pág. 72)

- *Declive positivo? É correlação **positiva***
- *Declive negativo? É correlação **negativa***

2.1.2.3 Força/Grau da Correlação: forte ou fraca

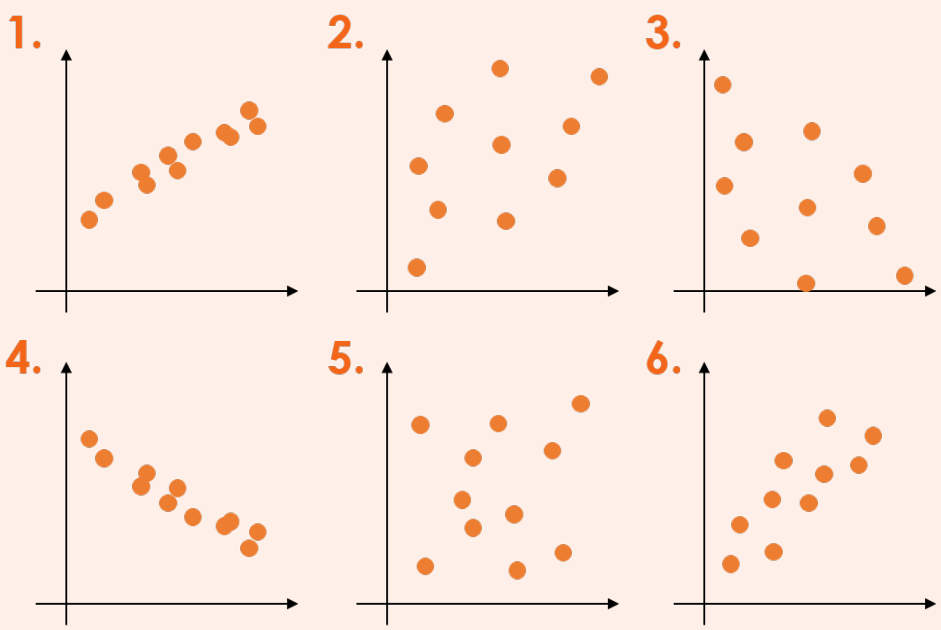
Exercício 2.6

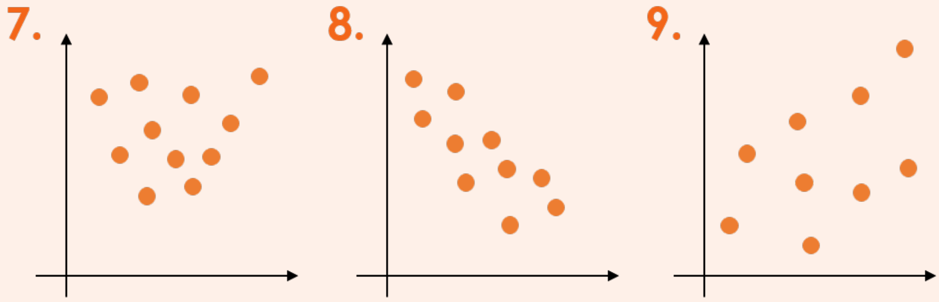
Se houver correlação, ou seja, se os pontos se juntam à volta de uma reta, então esses pontos podem estar muito ou pouco juntos a essa reta.

- Muito juntos à reta? É correlação **forte**
- Pouco juntos à reta? É correlação **fraca**

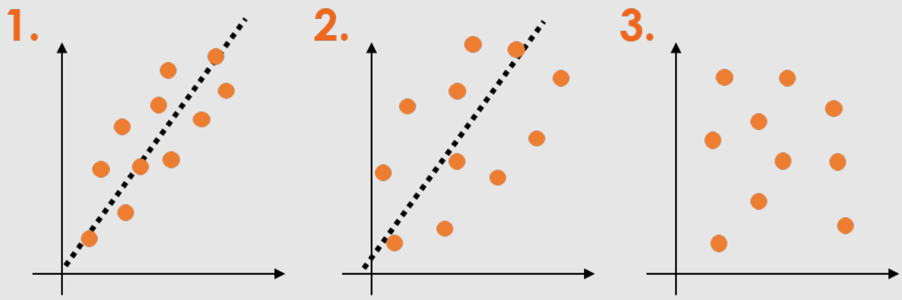
Sabendo isto, para cada um dos diagramas de dispersão seguintes:

- se houver correlação, classifica essa correlação quanto ao grau (**forte ou fraca**).
- Se não houver correlação, indica que é **nula**.





Exemplo:



Correlação **Forte** Correlação **Fraca** Correlação **Nula**

Nota: Por curiosidade, quando os pontos do diagrama pertencem todos à mesma reta (ou seja, são colineares), então diz-se que a correlação é **perfeita**.

Resolução (pág. 72)

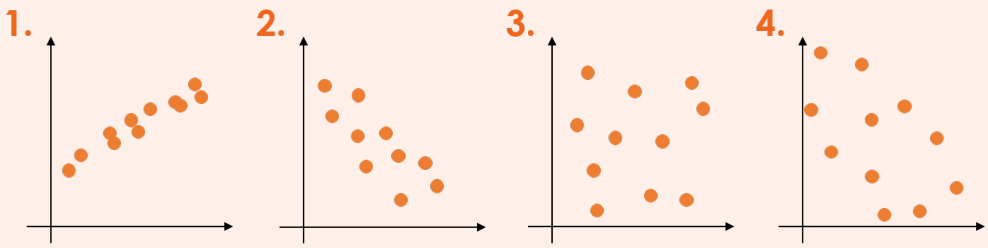
- *Muito juntos à reta? É correlação **forte***
- *Pouco juntos à reta? É correlação **fraca***

2.1.2.4 Classificação Recapitulada: Classificar Correlação pelo Diagrama

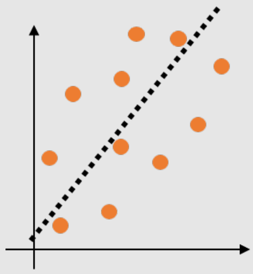
Exercício 2.7

Para cada um dos diagramas de dispersão seguintes:

- se houver correlação, classifica essa correlação quanto à direção (positiva ou negativa) e quanto ao grau (forte ou fraca).
- Se não houver correlação, indica que é nula.



Exemplo:



Correlação **Positiva Fraca**

Resolução (pág. 72)

Classificar Correlação pelo Diagrama? 3 Passos:

1. *Pontos juntam-se à volta de uma reta? Sim, há. Não, é* ***nula****.*
2. *Declive positivo? É* ***positiva****. Declive negativo? É* ***negativa****.*
3. *Pontos muito juntos à reta? É* ***forte****. Pontos pouco juntos à reta? É* ***fraca****.*

2.1.3 Treino 1 Recapitulado: Diagrama é Classificar

Exercício 2.8

Considera o seguinte conjunto de dados (x, y).

$$(8;\ 20) \quad (14;\ 14{,}5) \quad (11;\ 19) \quad (20;\ 10) \quad (26;\ 6) \quad (32;\ 5) \quad (38{,}2;\ 1{,}7)$$

Visualiza o respetiva diagrama de dispersão na calculadora e usa-o para indicar se pode haver correlação entre x e y (ou se não há/é nula). Se puder haver correlação, então classifica-a quanto à direção e quanto ao grau.

Resolução (pág. 72)

É exatamente assim que fazes Estatística na vida real:

1. *primeiro,* ***diagrama****: para perceberes se pode haver correlação (e tentares classificá-la)*

2.2 Treino 2: Coeficiente de Correlação Linear (ou de Pearson)

Já deves ter percebido que tentar classificar correlações olhando só para o diagrama é pouco rigoroso (de facto, **há certos diagramas em que é muito fácil haver opiniões diferentes**).

Mas, para que não hajam opiniões diferentes para o mesmo diagrama, será que há **alguma maneira numérica de classificar a correlação**?

E é exatamente para isso que serve o **coeficiente de correlação** r. É um número que te permite classificar a correlação! (para que não dependas só do diagrama).

2.2.1 Classificar Correlação pelo Coeficiente

2.2.1.1 Facto 1: está entre -1 e 1 (inclusive)

Exercício 2.9

Sabendo que o coeficiente de correlação r está entre -1 e 1 (inclusive), ou seja, $r \in [-1,1]$, ou seja, $-1 \le r \le 1$, indica, para cada uma das seguintes listas de números, quais desses números podem ser valores de um coeficiente de correlação r.

Dica: Usa a calculadora para calcular qualquer valor que não saibas de cabeça.

1. $-2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2$
2. $0{,}4 \quad -0{,}7 \quad 1{,}2 \quad -1{,}2$
3. $0{,}23 \quad -2{,}05 \quad -0{,}425 \quad -1$
4. $\frac{3}{4} \quad \frac{4}{3} \quad -\frac{4}{3} \quad -\frac{3}{4}$
5. $-\sqrt{3} \quad 0 \quad -\frac{2}{e} \quad \ln(\pi) \quad 0{,}93$

Resolução (pág. 73)

r está entre -1 e 1 inclusive. Por isso, só há 3 hipóteses: $r = \pm 1$ ou 0 ou $\pm 0,\cdots$ ("zero vírgula qualquer coisa").

2.2.1.2 Facto 2: r positivo, negativo ou nula dá correlação positiva, negativa ou nula

Exercício 2.10

Sabe-se que:

- se $r > 0$ (positivo), é correlação **positiva**
- se $r < 0$ (negativo), é correlação **negativa**
- se $r = 0$ (nulo), é correlação **nula**

Sabendo isto, para cada um dos seguintes valores de coeficiente de correlação r, classifica a correlação quanto à direção (positiva ou negativa) ou indica que é nula.

1. $r = 0{,}93$
2. $r = 0{,}19$
3. $r = 1$
4. $r = -0{,}19$
5. $r = -0{,}825$
6. $r = 0$
7. $r = \frac{2}{3}$
8. $r = -1$

Exemplo:

- $r = 0{,}35$ Correlação Positiva
- $r = -0{,}35$ Correlação Negativa
- $r = 0$ Correlação Nula

Resolução (pág. 73)

r é positivo, negativo ou nulo? Então a correlação é positiva, negativa ou nula!

2.2.1.3 Facto 3: r perto de 0? Fraca. r longe de 0? Forte.

Exercício 2.11

Sabe-se que:

- se r está perto de 0, é correlação **fraca**
- se r está longe de 0 (perto de 1 ou -1), é correlação **forte**

Sabendo isto, para cada um dos seguintes valores de coeficiente de correlação r, classifica a correlação quanto ao grau (forte ou fraca) ou indica que é nula.

1. $r = 0{,}93$
2. $r = 0{,}19$
3. $r = -0{,}19$
4. $r = -0{,}86$
5. $r = 0{,}86$
6. $r = 0$
7. $r = -0{,}933$
8. $r = 0{,}1$

Exemplo:

- $r = -0{,}89$ Correlação Forte
- $r = -0{,}14$ Correlação Fraca

Nota: Nestes exercícios, encontrarás sempre valores ou muito perto de 0 ou muito longe de 0, mas **nenhum valor ali no meio** (ou seja, por volta dos $-0{,}5$ ou $0{,}5$), porque nunca há grande consenso se aí a correlação é forte ou fraca.

Nota: Por curiosidade, quando $r = \pm 1$, dizemos que a correlação é **perfeita**. Visualmente, isto significa que **todos os pontos do diagrama pertencem à mesma reta** (ou seja, são colineares). Por isso é que não coloquei ± 1 neste exercício (para não ter de ensinar mais outra palavra que provavelmente será desnecessária).

Resolução (pág. 73)

- *r perto de 0? Correlação **fraca**!*
- *r longe de 0 (perto de ± 1)? Correlação **forte**!*

2.2.1.4 Classificação Recapitulada: Classificar Correlação pelo Coeficiente

Exercício 2.12

Para cada um dos seguintes valores de coeficiente de correlação r, classifica a correlação quanto à direção e quanto ao grau (ou indica que é nula).

1. $r = 0{,}88$
2. $r = 0$
3. $r = -0{,}79$
4. $r = 0{,}13$

Exemplo: $r = -0{,}21$ Correlação Negativa Fraca

Nota: Repara que o sinal de r (+ ou −) diz a direção, e o valor absoluto de r (só o número, sem o sinal + ou −) diz o grau.

Por exemplo, em $r = -0{,}21$:

- o sinal − diz-nos que é negativa
- o valor absoluto 0,21 diz-nos que é fraca.

Resolução (pág. 73)

Classificar correlação pelo Coeficiente? 2 Passos:

1. *r é positivo, negativo ou nulo? Então a correlação é* ***positiva, negativa ou nula****!*

2. *r perto de 0? É* ***fraca****! r longe de 0 (perto de ±1)? É* ***forte****!*

2.2.2 Calculadora: Calcular o coeficiente de correlação r

Exercício 2.13

Para cada um dos seguintes conjuntos de dados de 2 variáveis (x,y), copia esses dados (x,y) para 2 listas na calculadora e usa a funcionalidade "Regressão Linear" para calcular o coeficiente de correlação r.

Apresenta o valor de r na forma de dízima, arredondado às centésimas.

1.

x	y
3	5
4	8
7	1

2.

x	y
6,45	9
10	3
1	2,5

3. (2; 3) (1,5; 7) (17; 11) (8; 19,1)

Nota: Se não souberes fazer a regressão linear na tua calculadora, então **pesquisa** (ou no teu manual de Matemática, ou nas instruções da calculadora, ou na internet).

Nota: Na calculadora TI-84, para que te apareça o r quando fazes a regressão linear, tens de ter o "Stats Diagnostics" ligado (que encontrarás no "Mode").

Exemplo: $(1,1)$ $(4,3)$ $(3,2)$ $(4,4)$

Primeiro, inserimos os dados em 2 listas (colunas) na calculadora, tal como estão nesta tabela.

x	y
1	1
4	3
3	2
4	4

Depois, na calculadora, escolhemos "Regressão Linear" (Linear Regression) e obtemos

$$r \approx 0{,}91$$

Resolução (pág. 74)

Coeficiente na calculadora? 2 Passos:

1. *Primeiro, copia para as **listas***
2. *E depois, **regressão linear***

2.2.3 Treinos 1,2 Recapitulados: Diagrama é Classificar, Coeficiente é Confirmar

Exercício 2.14

Considera a tabela ao lado com dados de 2 variáveis x, y.

1. Primeiro, **visualiza o respetiva diagrama de dispersão** na calculadora e usa-o para indicar se pode haver correlação (ou se não há/é nula).
2. Depois, se puder haver correlação, então **calcula o coeficiente de correlação** na calculadora, arredondado às centésimas, e usa-o para classificar a correlação quanto à direção e quanto ao grau.

x	y
1	2
6	4
3,2	5
14	11
9	10
20	16,9

Resolução (pág. 74)

É exatamente assim que fazes Estatística na vida real:

1. *primeiro, **diagrama**: para veres se pode haver correlação*
2. *depois, **coeficiente**: para classificares*

2.3 Treino 3: Reta de Regressão

Àquela reta à volta da qual todos os pontos se juntam (que melhor se aproxima dos pontos) chamamos **"reta de regressão"**.

Quando o coeficiente de correlação nos indica que temos uma **correlação forte**, então isso significa que **os dados são bem aproximados pela reta de regressão**.

E porque é que isto é tão fantástico? Porque, por exemplo, se tiveres a equação de uma reta de regressão que relaciona o número de exercícios de Matemática que fazes, x, com o tempo que demoras a resolver esses exercícios, y, então **podes usar essa equação para estimar quanto tempo (y) demorarás a fazer um certo número de exercícios de Matemática (x).** E como a correlação é forte, sabes que essas estimativas estarão próximas da realidade.

No fundo, quando a correlação é forte, podes usar a equação da reta de regressão (que relaciona x e y) **para calcular/estimar valores de y a partir de novos valores de x** (ou vice-versa: calcular/estimar valores de x a partir de novos valores de y). E como a correlação é forte, sabes que **essas estimativas estarão próximas da realidade**.

Essa é a grande utilidade da reta de regressão: **estimar** valores de x e y (mas só quando a correlação é forte)

Por isso, finalmente vamos ver **como calcular a equação da reta de regressão e usá-la para estimar valores de x e y.**

2.3.1 Calculadora: equação da reta de regressão

Exercício 2.15

Sabe-se que cada um dos seguintes conjuntos de dados é bem aproximado pela respetiva reta de regressão linear (porque o respetivo valor de r indica que têm correlações fortes).

Para cada uma das tabelas seguintes, copia os seus dados para as listas na calculadora e faz a regressão linear na calculadora para determinar a equação da respetiva reta de regressão linear de y sobre x.

Apresenta a equação da reta de regressão na forma $y = ax + b$, com os parâmetros a, b arredondados às milésimas.

Nota: Se ainda tiveres dúvidas de como fazer isto na calculadora, pesquisa (ou no teu manual de Matemática, ou nas instruções da calculadora, ou na internet).

1.

x	y
1	30
2	55
5	72
7	87
11	92
19	160
31	221

2.

x	y
1	504
2	538
5	411,5
7	370
11	296
19	212,8
31	147

3. $(3;\ 3{,}6)$
$(1{,}5;\ 2{,}13)$
$(0{,}99;\ 1{,}45)$
$(7{,}2;\ 6)$
$(5;\ 4{,}112)$

Exemplo: $(1,1)$ $(4,3)$ $(3,2)$ $(4,4)$

Primeiro, inserimos os dados em 2 listas (colunas) na calculadora, tal como estão nesta tabela.

x	y
1	1
4	3
3	2
4	4

Depois, na calculadora, escolhemos "Regressão Linear" (Linear Regression) e obtemos

$$a \approx 0{,}833$$
$$b = 0$$

Por isso, a equação da reta de regressão linear é

$$y = 0{,}833x + 0$$

Nota: Neste caso, como $b = 0$, podes escrever apenas $y = 0{,}833x$.

Resolução (pág. 74)

Reta de Regressão na calculadora? É como o coeficiente!
*1. Primeiro, copia para as **listas***

2. *E depois,* ***regressão linear***

2.3.2 Estimar valores de x ou y

Exercício 2.16

Em cada uma das alíneas seguintes, são dados um valor de x ou y e a equação de uma reta de regressão que aproxima bem o seu respetivo conjunto de dados (ou seja, a correlação é forte, e, por isso, podes usar a equação dessas retas de regressão para estimar valores de x ou y).

Substituindo o valor de x ou y que te dão na equação da reta de regressão, calcula o valor de x ou y pedido, escrevendo-o na forma de dízima.

1. Calcula y do ponto da reta de equação $y = -2x + 16$ em que $x = 3$
2. Calcula y do ponto da reta de equação $y = 2{,}5x - 7{,}35$ em que $x = 3$
3. Calcula x do ponto da reta de equação $y = 2{,}5x - 7{,}35$ em que $y = 3$
4. Calcula x do ponto da reta de equação $y = \frac{2}{7}x + 0{,}385$ em que $y = 444$
5. Calcula y do ponto da reta de equação $y = -1{,}12x + \frac{99}{2}$ em que $x = 9{,}5$

Exemplo:

1. Calcula y do ponto da reta de equação $y = 5x - 2$ em que $x = 1$.
   - Queremos y, por isso precisamos de 1 equação com y. Substituindo $x = 1$ na equação da reta $y = 5x + 2$, temos

$$\begin{aligned} & y = 5 \times 1 + 2 \\ \Leftrightarrow & y = 7 \end{aligned}$$

2. Calcula x do ponto da reta de equação $y = 5x + 2$ em que $y = 1$.
   - Queremos x, por isso precisamos de 1 equação com x. Substituindo $y = 1$ na equação da reta $y = 5x + 2$, temos

$$\begin{aligned} & 1 = 5x - 2 \\ \Leftrightarrow & x = \frac{1+2}{5} \\ \Leftrightarrow & x = 0{,}6 \end{aligned}$$

Resolução (pág. 75)

Lembra-te da Lei Fundamental da Matemática: "Queres x? Então precisas de 1 *equação com x!*

Ou, no geral: "Queres 1 *incógnita? Então precisas de* 1 *equação com essa incógnita!*

Ou mais geral ainda, "Queres n incógnitas? Então precisas de n equações com essas incógnitas! (para resolver um sistema de n equações)

Exercício 2.17

Supõe que a relação entre a altura, em centímetros, de um adulto (x) e o seu peso, em quilogramas (y) é bem aproximada por uma regressão linear da forma $y = 0{,}98x - 98{,}7$.

Usando este modelo de regressão linear, estima os valores seguintes, apresentando os resultados arredondados às unidades.

1. O peso, em quilogramas, de um adulto com 167 cm de altura.
2. O peso, em quilogramas, de um adulto com 190 cm de altura.
3. A altura, em centímetros, de um adulto com 72 quilogramas de peso.

Exemplo: O peso, em quilogramas, de um adulto com 150 cm de altura.

Queremos y (peso), por isso precisamos de 1 equação com y. Substituindo $x = 150$ (altura) na equação da reta de regressão $y = 0{,}98x - 98{,}7$, temos

$$\begin{aligned} & y = 0{,}98 \times 150 - 98{,}7 \\ \Leftrightarrow & y \approx 48 \text{ kg} \end{aligned}$$

Resolução (pág. 76)

Para que serve a reta de regressão? Para ***estimar (calcular) valores de** x* ***ou*** *y. (mas só podes fazê-lo quando a correlaçao é forte, ou seja, quando a reta de regressão aproxima bem os dados)*

2.3.3 Treinos 1,2,3 Recapitulados: Diagrama é Classificar, Coeficiente é Confirmar, Reta é Estimar

Exercício 2.18

Considera o seguinte conjunto de dados (x, y).

$$(2;\ 38) \quad (12;\ 13) \quad (14;\ 19) \quad (7;\ 21) \quad (9;\ 27) \quad (6;\ 30{,}7) \quad (10{,}5;\ 20)$$

1. Primeiro, **visualiza o respetiva diagrama de dispersão** na calculadora e usa-o para indicar se pode haver correlação (ou se não há/é nula).
2. Depois, se puder haver correlação, então **calcula o coeficiente de correlação** na calculadora, arredondado às centésimas, e usa-o para classificar a correlação quanto à direção e quanto ao grau. Com isto, indica se os dados são bem aproximados pela reta de regressão, justificando com base na tua classificação.
3. Por fim, se os dados forem bem aproximados pela reta de regressão, então **calcula a equação da reta de regressão** na calculadora (com parâmetros a, b arredondados as milésimas) e usa-a para estimar o valor de y quando $x = 4{,}7$ (arredondando o resultado às unidades).

Resolução (pág. 76)

É exatamente assim que fazes Estatística na vida real:

1. *primeiro,* ***diagrama****: para veres se pode haver correlação*

2. *depois,* ***coeficiente****: para classificares (e assim veres se os dados são bem aproximados pela reta de regressão)*
3. *por fim,* ***reta de regressão****: para estimar novos x, y*

E, se reparares bem, este exercício JUNTA TUDO o que aprendeste sobre Estatística com 2 variáveis! E mostra como a Estatística é usada na prática! INCRÍVEL! :D

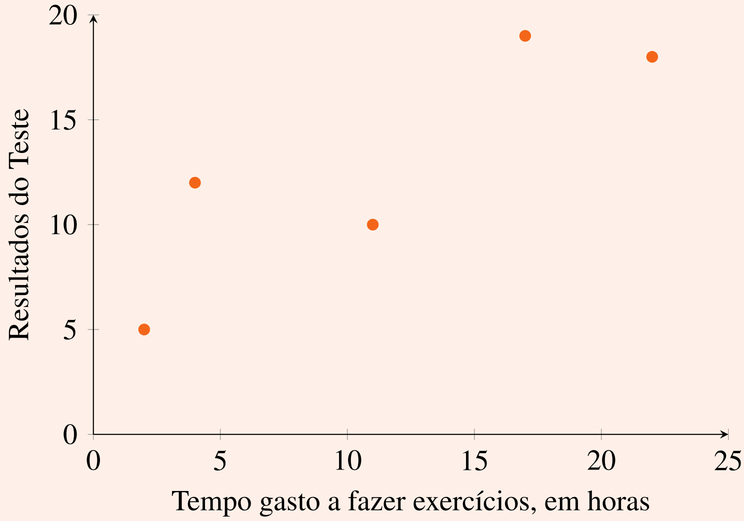
Temos então o GRANDE RESUMO DA ESTATÍSTICA COM 2 VARIÁVEIS: "Diagrama é classificar, Coeficiente é confirmar, Reta é estimar!"

2.4 Exercícios Modelo

2.4.1 Relacionar Diagrama, Coeficiente e Reta

Exercício 2.19

O diagrama de dispersão representado na figura seguinte mostra uma forte associação linear positiva entre o tempo gasto, em horas, a fazer exercícios de Matemática e os resultados num teste de Matemática.



Em cada uma das opções seguintes, são dados um valor de r, coeficiente de correlação linear, e a equação de uma reta.

Em qual das opções seguintes poderão estar representados o valor de r e uma equação da reta de regressão linear da distribuição representada na figura?

(A) $r = 0{,}13$
$y = 0{,}59x + 6{,}15$

(B) $r = 0{,}87$
$y = -0{,}59x + 6{,}15$

(C) $r = -0{,}87$
$y = -0{,}59x + 6{,}15$

(D) $r = 0{,}87$
$y = 0{,}59x + 6{,}15$

Nota: Dizer "forte **associação** linear" ou dizer "forte **correlação** linear" é a mesma coisa.

Resolução (pág. 77)

Lembra-te de como o coeficiente de correlação r está relacionado com a classificação da correlação (e, assim, com a equação da reta)!

2.4.2 Calcular Equação da Reta e Estimar Valor de x ou y

Exercício 2.20

A tabela seguinte é referente à duração, em minutos, de cada vídeo do canal de YouTube "Ricardo Ferreira" e ao tempo, em minutos, gasto a criar esse vídeo.

Considera adequados o modelo de regressão linear de y sobre x obtido a partir dos dados apresentados na tabela.

Um outro vídeo do canal Ricardo Ferreira tem a duração de 41 minutos.

Estima, com base no modelo proposto, quanto tempo foi gasto a criar esse vídeo.

Na tua resposta, apresenta:

- os valores dos parâmetros da equação da reta de regressão linear de y sobre x, arredondados às milésimas;
- o valor pedido em horas, arredondado às unidades.

Duração, em minutos, do vídeo (x)	**Tempo, em horas, gasto a criar o vídeo** (y)
33	42
32	30
5	12,9
55	40
135	111
67	50
88	70

Resolução (pág. 78)

Lembra-te da Lei Fundamental da Matemática: "Queres 1 incógnita? Então precisas de 1 equação com essa incógnita!

Ou, no geral, "Queres n incógnitas? Então precisas de n equações com essas incógnitas! (para resolver um sistema de n equações)

2.5 Depois dos Exercícios Modelo: como treinar mais?

2.5.1 Primeiro, faz mais exercícios parecidos com os meus exercícios modelo (são os mais prováveis de sair em exame)

Podes encontrar exercícios parecidos com os meus exercícios modelo de 2 maneiras:

- Primeiro, cria os teus próprios exercícios! Para isso, **pega nos meus exercícios-modelo e troca os valores desses exerícios** (troca os dados, os diagramas, o valor de r, a equação da reta, etc.) Assim tens infinitos exercícios modelo! Depois é só resolvê-los e, de preferência, corrigires (o na tua calculadora ou num solucionador online/inteligência artificial ou com outro ser humano).
- Depois, **procura os exercícios muito parecidos com os meus exercícios modelo que existem nos exames de MACS e Matemática B** 10.° **ano** (Para MACS, podes ver as fichas de trabalho do Matemática? Absolutamente!, com os exercícios já divididos por 3 temas: "Frequências", "Medidas" e "Dados Bivariados". Para Matemática B, é veres os exames anteriores 1 a 1, especialmente os de 2021 – 2023, por exemplo, também no Matemática? Absolutamente!). E, mais uma vez, se precisares de mais exercícios destes, é só trocares os valores da pergunta (e depois resolver e corrigir).

2.5.2 Depois, faz outros exercícios que te desafiem

Já resolves todos os meus exercicios modelo sem hesitar?

- Se não, continua a treinar exercícios desse tipo até não hesitares (vê o capítulo anterior)
- Se sim, então podes começar a fazer outros exercícios.

Estes são os exercícios que recomendo, por esta ordem (**do mais provável sair em exame ao menos provável**):

1. Exercícios de exame de provas de aferição e exames 7.°, 8.°, 9.° ano
2. Outros exercícios de exame de MACS e Matemática B 10.° ano (que não sejam parecidos com os meus exercícios modelo)
3. Exercícios de Matemática A 10.°, 11.° de outros autores (livros e vídeos, fichas e exames–modelo das editoras, internet, etc.)

2.5.3 Este é o segredo para estudares Matemática!

Este é o segredo para estudares qualquer matéria de Matemática: estares sempre à procura de **exercícios que te desafiem** e treiná-los **até não hesitares** a resolvê-los (**começando sempre pelos exercícios mais prováveis de sair em exame** e depois indo até aos exercícios menos prováveis de sair em exame).

Começa já a fazer isto e **arrasarás em qualquer teste ou exame** de Matemática! :D

3. Resoluções

Resoluções dos Exercícios

Resolução 1.1

1.
   a. 2
   b. 4
   c. 3
   d. Ok
   e. Mau
   f. Bom
2.
   a. 3
   b. 2
   c. 2
   d. 1 e 5
   e. 4
3.
   a. $[10,15[$
   b. 1
   c. $[5,10[$

Exercício (pág. 2)

Resolução 1.2

1.
   a. 21
   b. 32
   c. 28
   d. Janeiro
   e. Fevereiro
2.
   a. 21
   b. 88
   c. 22
3.
   a. $[40,60[$
   b. 44

Exercício (pág. 3)

Resolução 1.3

Já sabes a Lei Fundamental da Matemática: se queres 1 incógnita, então precisas de 1 equação com essa incógnita.

Mas qual equação? Como o que queres e tens sempre é Frequências Absolutas individuais e Total, então precisas sempre de 1 equação que as relacione a todas.

Qual é essa equação? É a equação da Frequência Absoluta Total:

$$\boxed{\mathrm{FA}_{\mathrm{Total}} = \mathrm{FA}(x_1) + \mathrm{FA}(x_2) + \cdots + \mathrm{FA}(x_n)}$$

1. $\mathrm{FA}_{\mathrm{Total}} = 10 + 40 + 20$
   $\Leftrightarrow \mathrm{FA}_{\mathrm{Total}} = 70$
2. $\mathrm{FA}_{\mathrm{Total}} = 10 + 40 + 20 + 100$
   $\Leftrightarrow \mathrm{FA}_{\mathrm{Total}} = 170$
3. $170 = 10 + \mathrm{FA}(\mathrm{Azul}) + 20 + 100$
   $\Leftrightarrow \mathrm{FA}(\mathrm{Azul}) = 40$
4. $170 = 10 + 40 + 20 + \mathrm{FA}(\mathrm{Preto})$
   $\Leftrightarrow \mathrm{FA}(\mathrm{Preto}) = 100$
5. $170 = 10 + 40 + a + 100$
   $\Leftrightarrow a = 20$
6. $17a = a + 40 + 20 + 100$
   $\Leftrightarrow a = 10$

   Logo $\mathrm{FA}_{\mathrm{Total}} = 17a = 17 \times 10 = 170$
7. $120 = 62 + 40 + \mathrm{FA}(62)$
   $\Leftrightarrow \mathrm{FA}(62) = 18$
8. $6a = 2a + 15 + a$
   $\Leftrightarrow a = 5$

   Logo $\mathrm{FA}([1,4[) = 2a = 2 \times 5 = 10$

Exercício (pág. 4)

Resolução 1.4

Já sabes a Lei Fundamental da Matemática: se queres 1 incógnita, então precisas de 1 equação com essa incógnita.

Mas qual equação? Como de entre $\mathrm{FR}(x)$, $\mathrm{FA}(x)$ e $\mathrm{FA}_{\mathrm{Total}}$, queres sempre 1 delas e tens sempre as outras 2, então precisas sempre de 1 equação que as relacione a todas.

Qual é essa equação? É a equação da Frequência Relativa:

$$\boxed{\mathrm{FR}(x) = \frac{\mathrm{FA}(x)}{\mathrm{FA}_{\mathrm{Total}}}}$$

1.
$$\mathrm{FR}(x)=\frac{\mathrm{FA}(x)}{\mathrm{FA}_{\mathrm{Total}}}$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{FR}(x)=\frac{7}{10}$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{FR}(x)=0{,}7$$

2.
$$\mathrm{FR}(x)=\frac{\mathrm{FA}(x)}{\mathrm{FA}_{\mathrm{Total}}}$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{FR}(x)=\frac{22}{25}$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{FR}(x)=0{,}88$$

3.
$$\mathrm{FR}(x)=\frac{\mathrm{FA}(x)}{\mathrm{FA}_{\mathrm{Total}}}$$
$$\Leftrightarrow 0{,}88=\frac{\mathrm{FA}(x)}{25}$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{FA}(x)=0{,}88\times 25$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{FA}(x)=22$$

4.
$$\mathrm{FR}(x)=\frac{\mathrm{FA}(x)}{\mathrm{FA}_{\mathrm{Total}}}$$
$$\Leftrightarrow 0{,}88=\frac{22}{\mathrm{FA}_{\mathrm{Total}}}$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{FA}_{\mathrm{Total}}=\frac{22}{0{,}88}$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{FA}_{\mathrm{Total}}=25$$

5.
$$\mathrm{FR}(x)=\frac{\mathrm{FA}(x)}{\mathrm{FA}_{\mathrm{Total}}}$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{FR}(x)=\frac{9}{40}$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{FR}(x)=0{,}225$$

6.
$$\mathrm{FR}(x)=\frac{\mathrm{FA}(x)}{\mathrm{FA}_{\mathrm{Total}}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{2}{7}=\frac{24}{\mathrm{FA}_{\mathrm{Total}}}$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{FA}_{\mathrm{Total}}=\frac{24\times 7}{2}$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{FA}_{\mathrm{Total}}=84$$

7.
$$\mathrm{FR}(x)=\frac{\mathrm{FA}(x)}{\mathrm{FA}_{\mathrm{Total}}}$$
$$\Leftrightarrow 37{,}5\%=\frac{\mathrm{FA}(x)}{200}$$
$$\Leftrightarrow \frac{37{,}5}{100}=\frac{\mathrm{FA}(x)}{200}$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{FA}(x)=\frac{37{,}5}{100}\times 200$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{FA}(x)=75$$

Exercício (pág. 6)

Resolução 1.5

1.

x	$\mathrm{FA}(x)$	$\mathrm{FR}(x)$
1	5	5/15
2	7	7/15
8	3	3/15
	15	1

- $\mathrm{FA}_{\mathrm{Total}}=5+7+3=15$
- $\mathrm{FR}(1)=\dfrac{\mathrm{FA}(1)}{\mathrm{FA}_{\mathrm{Total}}}\Leftrightarrow \mathrm{FR}(1)=\dfrac{5}{15}$
- $\mathrm{FR}(2)=\dfrac{\mathrm{FA}(2)}{\mathrm{FA}_{\mathrm{Total}}}\Leftrightarrow \mathrm{FR}(2)=\dfrac{7}{15}$
- $\mathrm{FR}(8)=\dfrac{\mathrm{FA}(8)}{\mathrm{FA}_{\mathrm{Total}}}\Leftrightarrow \mathrm{FR}(8)=\dfrac{3}{15}$

2.

x	$\mathrm{FA}(x)$	$\mathrm{FR}(x)$
Rosa	27	27/43
Azul	16	16/43
	43	1

- $\mathrm{FA}_{\mathrm{Total}}=27+16=43$
- $\mathrm{FR}(\mathrm{Rosa})=\dfrac{\mathrm{FA}(\mathrm{Rosa})}{\mathrm{FA}_{\mathrm{Total}}}\Leftrightarrow \mathrm{FR}(\mathrm{Rosa})=\dfrac{27}{43}$
- $\mathrm{FR}(\mathrm{Azul})=\dfrac{\mathrm{FA}(\mathrm{Azul})}{\mathrm{FA}_{\mathrm{Total}}}\Leftrightarrow \mathrm{FR}(\mathrm{Azul})=\dfrac{16}{43}$

3.

x	$FR(x)$	$FA(x)$
1	0,5	15
2	1/6	5
8	1/3	10
	1	30

- $FR(1) = \dfrac{FA(1)}{FA_{Total}} \Leftrightarrow 0{,}5 = \dfrac{FA(1)}{30}$
  $\Leftrightarrow FA(1) = 0{,}5 \times 30 \Leftrightarrow FA(1) = 15$
- $FR(2) = \dfrac{FA(2)}{FA_{Total}} \Leftrightarrow \dfrac{1}{6} = \dfrac{FA(2)}{30}$
  $\Leftrightarrow FA(2) = \dfrac{1}{6} \times 30 \Leftrightarrow FA(2) = 5$
- $FR(8) = \dfrac{FA(8)}{FA_{Total}} \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} = \dfrac{FA(8)}{30}$
  $\Leftrightarrow FA(8) = \dfrac{1}{3} \times 30 \Leftrightarrow FA(8) = 10$

4.

x	$FR(x)$	$FA(x)$
$[0, 11[$	65%	26
$[11, 22[$	35%	14
	1	40

- $FR([0,11[) = \dfrac{FA([0,11[)}{FA_{Total}} \Leftrightarrow 65\% = \dfrac{FA([0,11[)}{40}$
  $\Leftrightarrow \dfrac{65}{100} = \dfrac{FA([0,11[)}{40} \Leftrightarrow FA([0,11[) = \dfrac{65}{100} \times 40$
  $\Leftrightarrow FA([0,11[) = 26$
- $FR([11,22[) = \dfrac{FA([11,22[)}{FA_{Total}} \Leftrightarrow 35\% = \dfrac{FA([11,22[)}{40}$
  $\Leftrightarrow \dfrac{35}{100} = \dfrac{FA([11,22[)}{40} \Leftrightarrow FA([11,22[) = \dfrac{35}{100} \times 40$
  $\Leftrightarrow FA([11,22[) = 14$

5.

x	$FA(x)$	$FR(x)$
5	6	0,3
9	4	0,2
13	10	0,5
	20	1

- Queremos FA_{Total} e temos $FA(5)$ e $FR(5)$, por isso usamos a equação que relaciona isso tudo (a equação da $FR(x)$)
  $FR(5) = \dfrac{FA(5)}{FA_{Total}} \Leftrightarrow 0{,}3 = \dfrac{6}{FA_{Total}}$
  $\Leftrightarrow FA_{Total} = \dfrac{6}{0{,}3} \Leftrightarrow FA_{Total} = 20$
- $FR(9) = \dfrac{FA(9)}{FA_{Total}} \Leftrightarrow 0{,}2 = \dfrac{FA(9)}{20}$
  $\Leftrightarrow FA(9) = 0{,}2 \times 20 \Leftrightarrow FA(9) = 4$
- $FR(13) = \dfrac{FA(13)}{FA_{Total}} \Leftrightarrow 0{,}5 = \dfrac{FA(13)}{20}$
  $\Leftrightarrow FA(13) = 0{,}5 \times 20 \Leftrightarrow FA(13) = 10$

Exercício (pág. 8)

Resolução 1.6

1. China
2. Itália
3. Amodal (não há moda)

4. França, Japão
5. $[0,7[$, $[7,14[$, $[21,28[$ (Dica: $32\% = 0{,}32$)
6. 12 (Dica: $1/3$ é a maior frequência – verifica na calculadora)

Exercício (pág. 11)

Resolução 1.7

Já sabes a Lei Fundamental da Matemática: se queres 1 incógnita, então precisas de 1 equação com essa incógnita.

Mas qual equação? Como de entre Amplitude, Máximo e Mínimo, queres sempre 1 delas e tens sempre as outras 2, então precisas sempre de 1 equação que as relacione a todas.

Qual é essa equação? É a equação da Amplitude.

$$\boxed{\text{Amplitude} = \text{Máximo} - \text{Mínimo}}$$

1. $\text{Amplitude} = \text{Máximo} - \text{Mínimo}$
   $\Leftrightarrow \text{Amplitude} = 59 - 10$
   $\Leftrightarrow \text{Amplitude} = 49$
2. $\text{Amplitude} = \text{Máximo} - \text{Mínimo}$
   $\Leftrightarrow \text{Amplitude} = 59 - 10$
   $\Leftrightarrow \text{Amplitude} = 49$
3. $\text{Amplitude} = \text{Máximo} - \text{Mínimo}$
   $\Leftrightarrow \text{Amplitude} = 59 - 10$
   $\Leftrightarrow \text{Amplitude} = 49$
4. $\text{Amplitude} = \text{Máximo} - \text{Mínimo}$
   $\Leftrightarrow 49 = a - 10$
   $\Leftrightarrow a = 59$
5. $\text{Amplitude} = \text{Máximo} - \text{Mínimo}$
   $\Leftrightarrow 49 = 59 - a$
   $\Leftrightarrow a = 10$
6. Chamamos a ao espaço vazio.
   $\text{Amplitude} = \text{Máximo} - \text{Mínimo}$
   $\Leftrightarrow 49 = 59 - a$
   $\Leftrightarrow a = 10$
7. $\text{Amplitude} = \text{Máximo} - \text{Mínimo}$
   $\Leftrightarrow \text{Amplitude} = 37 - 5$
   $\Leftrightarrow \text{Amplitude} = 32$
8. Chamamos a ao espaço vazio.
   $\text{Amplitude} = \text{Máximo} - \text{Mínimo}$
   $\Leftrightarrow 213 = a - 120$
   $\Leftrightarrow a = 333$

Exercício (pág. 12)

Resolução 1.8

Já sabes a Lei Fundamental da Matemática: se queres 1 incógnita, então precisas de 1 equação com essa incógnita.

Mas qual equação? Como de entre Amplitude, Máximo e Mínimo, queres sempre 1 delas e tens sempre as outras 2, então precisas sempre de 1 equação que as relacione a todas.

Qual é essa equação? É a equação da Amplitude.

$$\boxed{\text{Amplitude} = \text{Máximo} - \text{Mínimo}}$$

1. $\text{Amplitude} = \text{Máximo} - \text{Mínimo}$
$\Leftrightarrow \text{Amplitude} = 21 - 5$
$\Leftrightarrow \text{Amplitude} = 16$

2. $\text{Amplitude} = \text{Máximo} - \text{Mínimo}$
$\Leftrightarrow \text{Amplitude} = 22 - 10$
$\Leftrightarrow \text{Amplitude} = 12$

3. $\text{Amplitude} = \text{Máximo} - \text{Mínimo}$
$\Leftrightarrow 35 = a - 2$
$\Leftrightarrow a = 37$

4. $\text{Amplitude} = \text{Máximo} - \text{Mínimo}$
$\Leftrightarrow 72 = 101 - a$
$\Leftrightarrow a = 29$

Exercício (pág. 14)

Resolução 1.9

Já sabes a Lei Fundamental da Matemática: se queres 1 incógnita, então precisas de 1 equação com essa incógnita.

Mas qual equação? Como de entre Média $\bar{x}$, Dados x e Frequências Absolutas $\text{FA}(x)$, queres sempre 1 delas e tens sempre as outras 2, então precisas sempre de 1 equação que as relacione a todas.

Qual é essa equação? É a equação da Média.

$$\boxed{\bar{x} = \frac{x_{\text{Total}}}{\text{FA}_{\text{Total}}}}$$

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\text{FA}(x_1)x_1 + \cdots + \text{FA}(x_n)x_n}{\text{FA}(x_1) + \cdots + \text{FA}(x_n)}}$$

1.
$$\bar{x} = \frac{x_{\text{Total}}}{\text{FA}_{\text{Total}}} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{7\times1+2\times3+3\times6+5\times20}{7+2+3+5} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{131}{17}$$

2.
$$\bar{x} = \frac{x_{\text{Total}}}{\text{FA}_{\text{Total}}} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{2\times1+11\times2+7\times8}{2+11+7} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{80}{20} \Leftrightarrow \bar{x} = 4$$

3.
$$\bar{x} = \frac{x_{\text{Total}}}{\text{FA}_{\text{Total}}} \Leftrightarrow 4 = \frac{2\times1+11\times a+7\times8}{2+11+7} \Leftrightarrow 4 = \frac{58+11a}{20} \Leftrightarrow a = \frac{80-58}{11} \Leftrightarrow a = 2$$

4. Chamamos a ao espaço vazio.

$$\bar{x} = \frac{x_{\text{Total}}}{\text{FA}_{\text{Total}}} \Leftrightarrow 4 = \frac{2\times1+11\times2+a\times8}{2+11+a} \Leftrightarrow 4 = \frac{24+8a}{13+a} \Leftrightarrow 52+4a = 24+8a \Leftrightarrow a = 7$$

5.
$$\bar{x} = \frac{x_{\text{Total}}}{\text{FA}_{\text{Total}}} \Leftrightarrow \frac{5}{2} = \frac{a\times1+3\times3+2a\times1}{a+3+1} \Leftrightarrow \frac{5}{2} = \frac{3a+9}{4+a} \Leftrightarrow 20+5a = 6a+18 \Leftrightarrow a = 2$$

6.

x	$\text{FR}(x)$	$\text{FA}(x)$
10	0,35	7
20	0,25	5
30	0,4	8
	1	20

- $\text{FR}(10) = \frac{\text{FA}(10)}{\text{FA}_{\text{Total}}} \Leftrightarrow 0{,}35 = \frac{\text{FA}(10)}{20} \Leftrightarrow \text{FA}(10) = 7$
- $\text{FR}(20) = \frac{\text{FA}(20)}{\text{FA}_{\text{Total}}} \Leftrightarrow 0{,}25 = \frac{\text{FA}(20)}{20} \Leftrightarrow \text{FA}(20) = 5$
- $\text{FR}(30) = \frac{\text{FA}(30)}{\text{FA}_{\text{Total}}} \Leftrightarrow 0{,}4 = \frac{\text{FA}(30)}{20} \Leftrightarrow \text{FA}(30) = 8$

$$\bar{x} = \frac{x_{\text{Total}}}{\text{FA}_{\text{Total}}} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{7\times10+5\times20+8\times30}{20} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{410}{20} \Leftrightarrow \bar{x} = 20{,}5$$

Exercício (pág. 15)

Resolução 1.10

Já sabes a Lei Fundamental da Matemática: se queres 1 incógnita, então precisas de 1 equação com essa incógnita.

Mas qual equação? Como de entre Média $\bar{x}$, Dados x e Frequências Absolutas $\text{FA}(x)$, queres sempre 1 delas e tens sempre as outras 2, então precisas sempre de 1 equação que as relacione a todas.

Qual é essa equação? É a equação da Média.

$$\boxed{\bar{x} = \frac{x_{\text{Total}}}{\text{FA}_{\text{Total}}}}$$

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\text{FA}(x_1)x_1 + \cdots + \text{FA}(x_n)x_n}{\text{FA}(x_1) + \cdots + \text{FA}(x_n)}}$$

1.

1. Primeiro, calculas o **ponto médio de cada intervalo** (é a média dos números inicial e final)
   - $\frac{1+5}{2} = 3$
   - $\frac{5+9}{2} = 7$
   - $\frac{9+13}{2} = 11$
   - $\frac{13+17}{2} = 15$

$x_{\text{médio}}$	x	$\text{FA}(x)$
3	$[1,5[$	2
7	$[5,9[$	4
11	$[9,13[$	1
15	$[13,17[$	3

2. E agora, aplicas a **equação da média** como sempre usando esses pontos médios.

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x_{\text{Total}}}{\text{FA}_{\text{Total}}} \\ \Leftrightarrow \bar{x} &= \frac{2 \times 3 + 4 \times 7 + 1 \times 11 + 3 \times 15}{2+4+1+3} \\ \Leftrightarrow \bar{x} &= \frac{90}{10} \\ \Leftrightarrow \bar{x} &= 9 \end{aligned}$$

2.

1. Primeiro, calculas o **ponto médio de cada intervalo** (é a média dos números inicial e final)
   - $\frac{0+7}{2} = 3{,}5$
   - $\frac{7+14}{2} = 10{,}5$
   - $\frac{14+21}{2} = 17{,}5$

$x_{\text{médio}}$	x	$\text{FA}(x)$
3,5	$[0,7[$	10
10,5	$[7,14[$	8
17,5	$[14,21[$	1

2. E agora, aplicas a **equação da média** como sempre usando esses pontos médios.

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x_{\text{Total}}}{\text{FA}_{\text{Total}}} \\ \Leftrightarrow \bar{x} &= \frac{10 \times 3{,}5 + 8 \times 10{,}5 + 1 \times 17{,}5}{10+8+1} \\ \Leftrightarrow \bar{x} &= \frac{136{,}5}{19} \end{aligned}$$

3. **1.** Primeiro, calculas o **ponto médio de cada intervalo** (é a média dos números inicial e final)

- $\frac{0+8}{2}=4$
- $\frac{8+16}{2}=12$
- $\frac{16+24}{2}=20$

$x_{\text{médio}}$	x	$FA(x)$
4	$[0,8[$	4
12	$[8,16[$	2
20	$[16,24[$	a

2. E agora, aplicas a **equação da média** como sempre usando esses pontos médios.

$$\begin{aligned}
&\bar{x}=\frac{x_{\text{Total}}}{FA_{\text{Total}}}\\
\Leftrightarrow\ &10=\frac{4\times4+2\times12+a\times20}{4+2+a}\\
\Leftrightarrow\ &10=\frac{40+20a}{6+a}\\
\Leftrightarrow\ &60+10a=40+20a\\
\Leftrightarrow\ &a=2
\end{aligned}$$

Exercício (pág. 17)

Resolução 1.11

1.

x	$FRac(x)$
2	0,25
3	0,4
5	0,5
8	0,85
12	1

- $Q_1=P_{25}=\frac{2+3}{2}=2{,}5$
  (o 25% está **"entre"** o 2 e o 3, por isso é a **média** deles)
- $M_e=P_{50}=\frac{5+8}{2}=6{,}5$
  (o 50% está **"entre"** o 5 e o 8, por isso é a **média** deles)
- $Q_3=P_{75}=8$
  (o 75% está **"dentro"** do 8 por isso é o **próprio**)
- $P_{90}=12$
  (o 90% está **"dentro"** do 12 por isso é o **próprio**)
- $P_{100}=\text{Máximo}=12$

2.

x	FRac(x)
2	0,1
3	0,4
5	0,75
8	0,9
12	1

- $Q_1 = P_{25} = 3$
  (o 25% está **“dentro”** do 3 por isso é o **próprio**)
- $M_e = P_{50} = 5$
  (o 50% está **“dentro”** do 5 por isso é o **próprio**)
- $Q_3 = P_{75} = \dfrac{5+8}{2} = 6{,}5$
  (o 75% está **“entre”** o 5 e o 8, por isso é a **média** deles)
- $P_{90} = \dfrac{8+12}{2} = 10$
  (o 90% está **“entre”** o 8 e o 12, por isso é a **média** deles)
- $P_{100} = \text{Máximo} = 12$

---

3. Queremos a, b, c, d, e, por isso precisamos de uma equação com cada uma delas. Quais equações? As 5 equações dadas.

x	FRac(x)
a	0,3
9	0,5
b	0,7
c	0,77
d	0,9
33	0,95
e	1

- $Q_1 = 4 \Leftrightarrow P_{25} = 4 \Leftrightarrow a = 4$
  (o 25% está **“dentro”** do a por isso é o **próprio**)
- $M_e = 10{,}5 \Leftrightarrow P_{50} = 10{,}5 \Leftrightarrow \dfrac{9+b}{2} = 10{,}5 \Leftrightarrow b = 12$
  (o 50% está **“entre”** o 9 e o b, por isso é a **média** deles)
- $Q_3 = 15 \Leftrightarrow P_{75} = 15 \Leftrightarrow c = 15$
  (o 75% está **“dentro”** do c por isso é o **próprio**)
- $P_{90} = 25 \Leftrightarrow \dfrac{d+33}{2} = 25 \Leftrightarrow d = 17$
  (o 90% está **“entre”** o d e o 33, por isso é a **média** deles)
- $P_{100} = 42 \Leftrightarrow \text{Máximo} = 42 \Leftrightarrow e = 42$

4.

x	FA(x)	FR(x)	FRac(x)
7	5	5/20	5/20 = 0,25
11	7	7/20	12/20 = 0,6
13	6	6/20	18/20 = 0,9
20	2	2/20	20/20 = 1
	20	1	

- $Q_1 = P_{25} = \dfrac{7+11}{2} = 9$
  (o 25% está **“entre”** o 7 e o 11, por isso é a **média** deles)
- $M_e = P_{50} = 11$
  (o 50% está **“dentro”** do 11 por isso é o **próprio**)
- $Q_3 = P_{75} = 13$
  (o 75% está **“dentro”** do 13 por isso é o **próprio**)
- $P_{90} = \dfrac{13+20}{2} = 16{,}5$
  (o 90% está **“entre”** o 13 e o 20, por isso é a **média** deles)

- P_{100} = Máximo = 20

Exercício (pág. 19)

Resolução 1.12

1. Queremos Amplitude Interquartil, por isso precisamos de uma equação com Amplitude Interquartil. Qual equação? Temos quartis, por isso é a equação que relaciona tudo isso: a equação da Amplitude Interquartil.

$$
\begin{aligned}
&\text{Amplitude Interquartil} = Q_3 - Q_1 \\
\Leftrightarrow &\text{Amplitude Interquartil} = 15{,}5 - 11 \\
\Leftrightarrow &\text{Amplitude Interquartil} = 4{,}5
\end{aligned}
$$

Cálculos Auxiliares

x	FRac(x)
2	0,1
8	0,18
11	0,4
12	0,75
19	1

- $Q_1 = P_{25} = 11$
(o 25% está **"dentro"** do 11 por isso é o **próprio**)
- $Q_3 = P_{75} = \dfrac{12+19}{2} = 15{,}5$
(o 75% está **"entre"** o 12 e o 19, por isso é a **média** deles)

---

2. Queremos a, por isso precisamos de uma equação com a. Qual equação? A equação dada: Amplitude Interquartil = 5

$$
\begin{aligned}
&\text{Amplitude Interquartil} = 5 \\
\Leftrightarrow &Q_3 - Q_1 = 5 \\
\Leftrightarrow &11 - \frac{a+7}{2} = 5 \\
\Leftrightarrow &22 - a - 7 = 10 \\
\Leftrightarrow &a = 5
\end{aligned}
$$

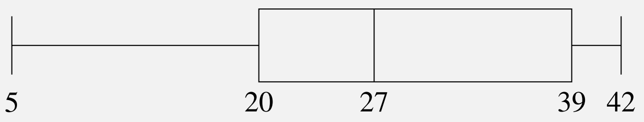
Cálculos Auxiliares

x	FRac(x)
4	0,06
a	0,25
7	0,75
15	0,77
20	1

- $Q_1 = P_{25} = \dfrac{a+7}{2}$
(o 25% está **"entre"** o a e o 7, por isso é a **média** deles)
- $Q_3 = P_{75} = \dfrac{7+15}{2} = 11$
(o 75% está **"entre"** o 7 e o 15, por isso é a **média** deles)

Exercício (pág. 22)

Resolução 1.13



1. Moda? O que é que está na moda? Ora, é o dado que aparece mais vezes que os outros. Mas no diagrama de extremos e quartis não sabemos os dados x nem frequências $\mathrm{FA}(x), \mathrm{FR}(x)$ (só sabemos extremos e quartis), por isso:

$$\text{Moda} = \text{Não é possível determinar}$$

2. Amplitude? É Máximo−Mínimo. Máximo e mínimo são extremos, por isso, podemos calcular a amplitude pelo diagrama de extremos e quartis:

$$\text{Amplitude} = \text{Máximo} - \text{Mínimo} = 42 - 5 = 37$$

3. Média? É somar todos os dados e dividir pelo número de dados. Mas no diagrama de extremos e quartis não sabemos os dados x nem frequências $\mathrm{FA}(x), \mathrm{FR}(x)$ (só sabemos extremos e quartis), por isso:

$$\text{Média} = \text{Não é possível determinar}$$

4. Variância (amostral) s? É a média corrigida dos quadrados dos desvios em relação à média. Mas, para isso, precisamos de saber a média e já vimos que não é possível determinar a média. Por isso:

$$\text{Variância} = \text{Não é possível determinar}$$

5. Desvio padrão (amostral)? É a raíz quadrada da média corrigida dos quadrados dos desvios em relação à média. Mas, para isso, precisamos de saber a média e já vimos que não é possível determinar a média. Por isso:

$$\text{Desvio padrão} = \text{Não é possível determinar}$$

6. Percentil de ordem 30? Este percentil não é um quartil, por isso não está no diagrama de extremos e quartis:

$$P_{30} = \text{Não é possível determinar}$$

7. Percentil de ordem 75? Este percentil é um quartil (é o 3.º Quartil), por isso está no diagrama de extremos e quartis:

$$P_{75} = Q_3 = 39$$

8. Percentil de ordem 100? Este percentil é um extremo (é o máximo), por isso está no diagrama de extremos e quartis:

$$P_{100} = \text{Máximo} = 42$$

9. 1.º Quartil? É um quartil, por isso está no diagrama de extremos e quartis (é o 1.º traço da "parte gorda" do diagrama):

$$1.^{\text{o}}\ \text{Quartil} = 20$$

10. Mediana? É um quartil (o 2.º quartil), por isso está no diagrama de extremos e quartis (é o 2.º traço da "parte gorda" do diagrama):

$$\text{Mediana} = 27$$

11. Amplitude interquartil? É a diferença entre o maior e o menor quartil (ou seja, o 3.º e o 1.º quartis, ou seja, o 3.º e o 1.º traços da "parte gorda" do diagrama. Por isso, está no diagrama de extremos e quartis:

$$\text{Amplitude Interquartil} = Q_3 - Q_1 = 39 - 20 = 19$$

Exercício (pág. 23)

Resolução 1.14

Dados:

- $13 < a < b < 19$
- Mediana = 16,5
- Amplitude Interquartil = 3,5

Como sempre, **calculamos imediatamente tudo o que podemos calcular**, mesmo sem saber bem onde irá dar.

- Podemos já **calcular a mediana**.

$$\begin{aligned} &\text{Mediana} = 16{,}5 \\ \Leftrightarrow &\frac{a+b}{2} = 16{,}5 \\ \Leftrightarrow &a+b = 33 \end{aligned}$$

- Podemos já **calcular a amplitude interquartil**.

$$\begin{aligned} &\text{Amplitude Interquartil} = 3{,}5 \\ \Leftrightarrow &Q_3 - Q_1 = 3{,}5 \\ \Leftrightarrow &\frac{b+19}{2} - \frac{13+a}{2} = 3{,}5 \\ \Leftrightarrow &(b+19) - (13+a) = 7 \\ \Leftrightarrow &b + 19 - 13 - a = 7 \\ \Leftrightarrow &b - a = 1 \end{aligned}$$

x	FA(x)	FR(x)	FRac(x)
13	1	1/4	2/6 = 0,25
a	1	1/4	3/6 = 0,50
b	1	1/4	6/6 = 0,75
19	1	1/4	4/4 = 1
	4	1	

Nota: Para calcular a mediana e quartis, como são pouco números, em vez de usares a Tabela de Frequências Relativas Acumuladas, também podias apenas escrever a lista por ordem e ver onde estava o 25%, 50% e 75%.

13 | a | b | 19

- E agora, como já temos 2 equações, então já podemos **resolver o sistema de 2 equações** (porque, pela Lei Fundamental da Matemática, se tens 2 incógnitas, então precisas de 2 equações com essas incognitas, que é o que tens agora!)

$$\begin{cases} a+b=33 \\ b-a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=33-a \\ b=1+a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+a=33-a \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=16 \\ b=1+a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=16 \\ b=17 \end{cases}$$

Perfeito! **Chegámos à resposta!** Dica: agora, **verifica a tua resposta**, calculando a Mediana e Amplitude Interquartil com os valores que descobriste e vendo se dá os tais 16,5 e 3,5, respetivamente (faz isto na calculadora, à mão, ou os dois).

Resposta: $a = 16, b = 17$

Exercício (pág. 24)

Resolução 1.15

Dados:

- Alunos A = 18
- Média A = 4 kg/aluno
- Média B = 5 kg/aluno
- Média AB = 4,4 kg/aluno

Como sempre, **calculamos imediatamente tudo o que podemos calcular**, mesmo sem saber bem onde irá dar.

- Podemos já **calcular a Média A**.

$$\text{Média A} = \frac{\text{Total Lixo A}}{\text{Total Alunos A}}$$
$$\Leftrightarrow 4 = \frac{\text{Total Lixo A}}{18}$$
$$\Leftrightarrow \text{Total Lixo A} = 4 \times 18$$
$$\Leftrightarrow \text{Total Lixo A} = 72$$

- Podemos já **calcular a Média B**.

$$\text{Média B} = \frac{\text{Total Lixo A}}{\text{Total Alunos B}}$$
$$\Leftrightarrow 5 = \frac{\text{Total Lixo B}}{\text{Total Alunos B}}$$

- Podemos já **calcular a Média AB**.

$$\text{Média Turma} = \frac{\text{Total Lixo AB}}{\text{Total Alunos AB}}$$
$$\Leftrightarrow 4{,}4 = \frac{\text{Total Lixo AB}}{\text{Total Alunos AB}}$$

Talvez te parece que já não há nada mais que possas calcular. Nesse caso, pensa **Queremos? Precisamos? Temos?**

- **Queremos:** Quero "Total Alunos B" (essa é a pergunta)
- **Precisamos:** Preciso de 1 equação com "Total Alunos B".
- **Temos:** Tenho 1 equação com "Total Alunos B"? Sim, a segunda equação (da média B). Mas essa equação tem 2 incógnitas que não sei: "Total Alunos B" e "Total Lixo B".

Pensando melhor:

- **Queremos:** Talvez quero "Total Alunos B" e "Total Lixo B"
- **Precisamos:** Preciso de 2 equações com essas 2 incógnitas.
- **Temos:** A segunda equação (da média B) é de certeza. Agora, preciso de outra equação. A primeira equação (da Média A) já está resolvida, por isso só pode ser a terceira equação (da Média AB). Por isso, **tem de haver alguma maneira de tornar essa terceira equação numa equação só com "Total Alunos B" e "Total Lixo B"**. Mas como?

E é aqui que terias que reparar que **afinal dava para fazer aparecer "Total Alunos B" e "Total Lixo B" na terceira equação (da Média AB)**:

$$
\begin{aligned}
&4{,}4 = \frac{\text{Total Lixo AB}}{\text{Total Alunos AB}}\\
\Leftrightarrow &4{,}4 = \frac{\text{Total Lixo A} + \text{Total Lixo B}}{\text{Total Alunos A} + \text{Total Alunos B}}\\
\Leftrightarrow &4{,}4 = \frac{72 + \text{Total Lixo B}}{18 + \text{Total Alunos B}}
\end{aligned}
$$

E agora sim, como já temos 2 equações com "Total Alunos B" e "Total Lixo B", então já podemos **resolver o sistema de 2 equações** (porque, pela Lei Fundamental da Matemática, se tens 2 incógnitas, então precisas de 2 equações com essas incognitas, que é o que tens agora!)

Para fazer as contas, chamamos x ao "Total Alunos B" e y ao "Total Lixo B".

$$
\begin{cases} 5 = \dfrac{\text{Total Lixo B}}{\text{Total Alunos B}} \\ 4{,}4 = \dfrac{72 + \text{Total Lixo B}}{18 + \text{Total Alunos B}} \end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases} 5 = \dfrac{y}{x} \\ 4{,}4 = \dfrac{72 + y}{18 + x} \end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases} y = 5x \\ 79{,}2 + 4{,}4x = 72 + y \end{cases}
$$

$$
\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5x \\ y = 7{,}2 + 4{,}4x \end{cases}
\Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ 5x = 7{,}2 + 4{,}4x \end{cases}
\Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ x = \dfrac{7{,}2}{0{,}6} \end{cases}
\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5x \\ x = 12 \end{cases}
\Leftrightarrow \begin{cases} y = 60 \\ x = 12 \end{cases}
$$

$$
\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Total Lixo B} = 60 \\ \text{Total Alunos B} = 12 \end{cases}
$$

Perfeito! **Chegámos à resposta!** Dica: agora, **verifica a tua resposta**, calculando as 3 Médias A, B, AB com os valores que descobriste e vendo se dá os tais 4, 5 e 4,4, respetivamente.

Resposta: A equipa B é consituída por 12 alunos.

Exercício (pág. 25)

Resolução 1.16

1. Na calculadora, copiamos a tabela como está na pergunta para 2 **Listas de Estatística** e usamos a funcionalidade **"Estatística de 1 Variável"**.

   Imediatamente temos pelo menos estas **7 medidas**:

   - **Média:** $\bar{x} = 6{,}1$
   - **Desvio Padrão Amostral:** $s \approx 3{,}55$
   - **Mínimo:** $\min = 1$
   - **1º Quartil:** $Q_1 = 3{,}5$
   - **Mediana (2.º quartil):** $\text{Med} = 6$
   - **3º Quartil:** $Q_3 = 10{,}5$
   - **Máximo:** $\max = 10{,}5$

   E as **restantes 4 medidas calculamos à mão**:

   - **Variância Amostral:** $\text{Variância} = s^2 \approx 12{,}63$
   - **Moda:** $\text{Moda} = 6$
   - **Amplitude:** $\text{Amplitude} = \max - \min = 10{,}5 - 1 = 9{,}5$
   - **Amplitude Interquartil:** $\text{Amplitude Interquartil} = Q_3 - Q_1 = 10{,}5 - 3{,}5 = 7$

2. Na calculadora, copiamos a tabela como está na pergunta para 2 **Listas de Estatística** e usamos a funcionalidade **"Estatística de 1 Variável"**.

   Imediatamente temos pelo menos estas **7 medidas**:

   - **Média:** $\bar{x} = 8{,}54$
   - **Desvio Padrão Amostral:** $s \approx 4{,}18$
   - **Mínimo:** $\min = 3$
   - **1º Quartil:** $Q_1 = 5$
   - **Mediana (2.º quartil):** $\text{Med} = 7$
   - **3º Quartil:** $Q_3 = 11$
   - **Máximo:** $\max = 15$

   E as **restantes 4 medidas calculamos à mão**:

   - **Variância Amostral:** $\text{Variância} = s^2 \approx 17{,}44$
   - **Moda:** $\text{Moda} = 7$ e 11 (há 2 modas)
   - **Amplitude:** $\text{Amplitude} = \max - \min = 15 - 3 = 12$
   - **Amplitude Interquartil:** $\text{Amplitude Interquartil} = Q_3 - Q_1 = 11 - 5 = 6$

3. Para inserir nas listas, **trocamos cada intervalo pelo ponto médio desse intervalo**:

x	$\text{FA}(x)$
3	3
7	4
11	4
15	2

E calculamos as medidas fazendo a "Estatística de 1 Variável" na calculadora. Agora, cuidado: **como os dados são intervalos, só podemos calcular a média, desvio padrão e variância** na calculadora (porque só estes é que se calculam escolhendo o ponto médio de cada intervalo). Todas as outras medidas tens de calcular à mão (**usando as fórmulas para intervalos**).

Imediatamente temos pelo menos **a média e desvio padrão**:

- **Média:** $\bar{x} = 8{,}54$
- **Desvio Padrão Amostral:** $s \approx 4{,}18$

E as **restantes medidas calculamos à mão**. Como pedido, não calculamos quartis (incluindo mediana) nem amplitude interquartil.

- **Variância Amostral:** Variância $= s^2 \approx 17{,}44$
- **Mínimo:** $\min = 1$
- **Máximo:** $\max = 7$
- **Moda:** Moda $= [5,9[$ e $[9,13[$ (há 2 modas)
- **Amplitude:** Amplitude $= \max - \min = 17 - 1 = 16$

4. Primeiro, como não tens Tabela de Frequências Absolutas Simples, então **crias Tabela de Frequências Absolutas Simples**.

x	FR(x)	FA(x)
4	25%	18
7	25%	18
9	25%	18
11	25%	18
		72

5. Na calculadora, copiamos a tabela para 2 **Listas de Estatística** (lista 1 para os dados x, lista 2 para as frequências absolutas FA(x)) e usamos a funcionalidade **"Estatística de 1 Variável"**.

Imediatamente temos pelo menos estas **7 medidas**:

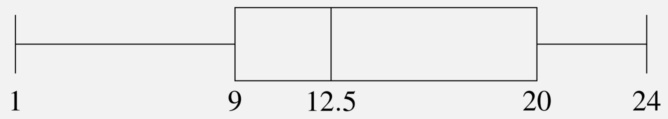
- **Média:** $\bar{x} = 72{,}5$
- **Desvio Padrão Amostral:** $s \approx 27{,}00$
- **Mínimo:** $\min = 30$
- **1º Quartil:** $Q_1 = 50$
- **Mediana (2.º quartil):** Med $= 80$
- **3º Quartil:** $Q_3 = 95$
- **Máximo:** $\max = 100$

E as **restantes 4 medidas calculamos à mão**:

- **Variância Amostral:** Variância $= s^2 \approx 728{,}87$
- **Moda:** Moda = Não há (é amodal)
- **Amplitude:** Amplitude $= \max - \min = 100 - 30 = 70$
- **Amplitude Interquartil:** Amplitude Interquartil $= Q_3 - Q_1 = 95 - 50 = 45$

Exercício (pág. 26)

Resolução 1.17



(A) A amplitude é 11 (NÃO! É 24 − 1 = 23)

(B) O 1.º quartil é 1 (NÃO! É 9)

(C) O 3.º quartil é 20 (SIM!)

(D) A amplitude interquartil é 12,5 (NÃO! É 20 − 9 = 11)

Resposta: (C) O 3.º quartil é 20

Exercício (pág. 28)

Resolução 1.18

- Queremos: P_{30}
- Precisamos: como é um percentil que não é um quartil, então precisamos de **calcular à mão**. E como os dados são números (1,2,3), precisamos de **usar a estratégia de percentil para números**.
- Temos: Temos frequências relativas num gráfico, por isso **primeiro transformamo-lo em tabela**. E depois é a **estratégia geral de percentil para número**: criar a coluna das frequências relativas acumuladas e ver onde está o 30% (Se estiver "dentro" de um número, é esse número. Se estiver "entre" 2 números, então é a média desses 2 números.).

1. Primeiro, copiamos os dados para uma tabela de frequências e criamos a coluna das Frequências Relativas Acumuladas.

x	FR(x)	FRac(x)
1	20%	20%
2	10%	30%
3	70%	100%
	100%	

2. Por fim, calculamos P_{30}, vendo onde está o 30% (de Frequência Relativa Acumulada).
   - Fazendo o risco do 30% na tabela, vemos que o 30% está **"entre"** o 2 e o 3, por isso é a **média** deles

$$P_{30} = \frac{2+3}{2} = 2{,}5$$

Resposta: (C) 2,5

Exercício (pág. 29)

Resolução 1.19

- Queremos: o conjunto de dados que tenha média 7,5 e desvio padrão amostral ≈ 4,08 (é o desvio padrão amostral porque isto é uma amostra)
- Precisamos: talvez a melhor estratégia é **calcular a média e desvio padrão amostral para os 4 conjuntos de dados** e ver qual tem os valores que queremos.
- Temos: Para calcular média e desvio padrão, **o melhor é usarmos a calculadora**. Para isso, copiamos as listas e depois usamos a funcionalidade "Estatística de 1 Variável".

Primeiro, copiamos para as listas da calculadora os seguintes dados:

(A)

x	FA(x)
2,5	3
7,5	4
12,5	3

(B)

x	FA(x)
1	4
5	1
11	2
12	2
20	1

(C)

x	FA(x)
5	3
10	4
15	3

(D)

x	FA(x)
2,5	3
7,5	3
12,5	3

Nota: Lembra-te que, na opção **(A)**, Histograma, como os teus dados são intervalos, então, para calcular média e desvio padrão, tu **usas o ponto médio de cada intervalo como o teu valor desse intervalo**. Por isso, na calculadora, não inseres $[0,5[$, $[5,10[$, $[10,15[$, mas sim 2,5, 7,5, 12,5 (porque são a média de 0 e 5, 5 e 10, 10 e 15, respetivamente)

Agora, usando a funcionalidade "Estatística de 1 Variável" na calculadora, calculamos a média e o desvio padrão amostral para cada um destes 4 conjuntos de dados.

(A)

- Média $\bar{x} = 7{,}5$
- Desvio padrão amostral $s \approx 4{,}08$

(B)

- Média $\bar{x} = 7{,}5$
- Desvio padrão amostral $s \approx 6{,}64$

(C)

- Média $\bar{x} = 10$
- Desvio padrão amostral $s \approx 4{,}08$

(D)

- Média $\bar{x} = 7{,}5$
- Desvio padrão amostral $s \approx 4{,}33$

Nota: Cuidado! Na opção **(D)**, temos desvio padrão **populacional** $\sigma \approx 4{,}08$.

Resposta: (A)

Exercício (pág. 29)

Resolução 1.20

No fundo, este exercício é 4 escolhas múltiplas em 1!

I. **Queremos?** $\mathrm{FR}(4)$. **Precisamos?** Equação com $\mathrm{FR}(4)$. **Temos?** Temos FA e queremos FR, por isso usamos uma equação que relacione tudo isso: a equação da Frequência Relativa.

$$\begin{aligned} \mathrm{FR}(4) &= \frac{\mathrm{FA}(4)}{\mathrm{FA}_{\mathrm{Total}}} \\ \Leftrightarrow \mathrm{FR}(4) &= \frac{26}{70} \\ \Leftrightarrow \mathrm{FR}(4) &\approx 0{,}37 \\ \Leftrightarrow \mathrm{FR}(4) &\approx 37\% \end{aligned}$$

Resposta: b) 37

II. **Queremos?** Ordenar moda, média e mediana por ordem crescente **Precisamos?** Precisamos de calcular as 3 medidas e ordená-las. **Temos?** Usamos a calculadora, copiando os dados do gráfico para as listas e fazendo lá as contas, e no fim ordenando.

1. Primeiro, copiamos para as listas da calculadora os seguintes dados:

x	$\mathrm{FA}(x)$
2	14
3	21
4	26
5	9

2. Agora, usando a funcionalidade “Estatística de 1 Variável” na calculadora, calculamos a moda, média e mediana.
   - Moda= 4 (também vês facilmente no gráfico)
   - Média≈ 3,43
   - Mediana= 3,5
3. E, por fim, é só ordenar.

$$\text{Média} < \text{Mediana} < \text{Moda}$$

Resposta: a) Média, Mediana, Moda

III. **Queremos?** Comparar variância e desvio padrão amostral (porque isto é uma amostra) **Precisamos?** Precisamos de calcular as 2 medidas e compará-. **Temos?** Usamos a calculadora, copiando os dados do gráfico para as listas e fazendo lá as contas, e no fim comparando.

1. Na alínea anterior, já tínhamos copiado os dados para as listas da calculadora e usado a funcionalidade “Estatística de 1 Variável”, por isso agora é só ver a variância e desvio padrão (amostral) s^2, s.
   - Variância Amostral $s^2 \approx 0{,}915$ (também vês facilmente no gráfico)
   - Desvio Padrão Amostral $s \approx 0{,}957$

2. E, por fim, é só comparar.

$$\text{Variância} < \text{Desvio Padrão}$$

Resposta: c) menor que o

IV. **Queremos?** Amplitude do ângulo ao centro do setor circular da nota final 2, ou seja, a frequência absoluta da nota final 2 mas em graus $\text{FA}(2)_{\text{graus}}$. **Precisamos?** Precisamos de uma equação com essa amplitude $\text{FA}(2)_{\text{graus}}$. **Temos?** Temos frequências absolutas em número $\text{FA}(x)_{\text{num}}$ e queremos frequências absolutas em graus, por isso precisamos de uma equação que relacione isso tudo. Mas qual equação? É o facto de que a frequência relativa da nota final 2, calculada ou pelo número ou pelos graus, tem de ser dar o mesmo valor, ou seja, $\text{FR}(2)_{\text{num}} = \text{FR}(2)_{\text{graus}}$.

$$\begin{aligned}
&\text{FR}(2)_{\text{num}} = \text{FR}(2)_{\text{graus}} \\
\Leftrightarrow &\frac{\text{FA}(2)_{\text{num}}}{\text{FA}_{\text{Total, num}}} = \frac{\text{FA}(2)_{\text{graus}}}{\text{FA}_{\text{Total, graus}}} \\
\Leftrightarrow &\frac{14}{70} = \frac{\text{FA}(2)_{\text{graus}}}{360} \\
\Leftrightarrow &\text{FA}(2)_{\text{graus}} = \frac{14}{70} \times 360 \\
\Leftrightarrow &\text{FA}(2)_{\text{graus}} = 72^\circ
\end{aligned}$$

Nota: No fundo, o que eu acabei de fazer aqui foi só uma **regra de 3 simples** ou **proporção** (como lhe preferires chamar):

$$\frac{14}{70} = \frac{\text{FA}(2)_{\text{graus}}}{360}$$

- Isto porque tanto em número como em graus, a percentagem do total que é ocupada tem de ser a mesma.
- Ou, por outras palavras, a frequência relativa tem de ser a mesma, daí $\text{FR}(2)_{\text{num}} = \text{FR}(2)_{\text{graus}}$

Resposta: b) 72

RESPOSTA FINAL:

I. **b) 37**

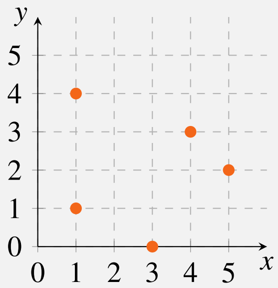
II. **a) Média, Mediana, Moda**

III. **c) menor que o**

IV. **b) 72**

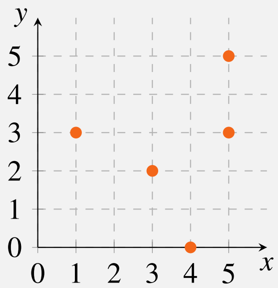
Exercício (pág. 30)

Resolução 2.1



Exercício (pág. 32)

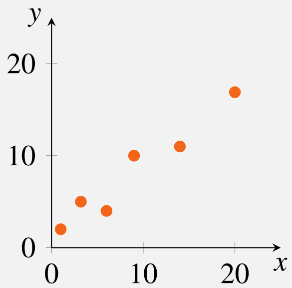
Resolução 2.2



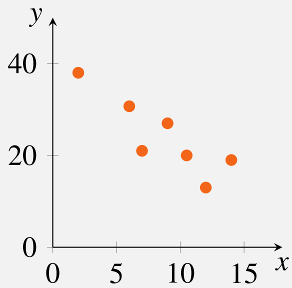
Exercício (pág. 33)

Resolução 2.3

1.



2.



Nota: O diagrama na tua calculadora pode estar um pouco mais esticado ou achatado, dependendo da janela que escolheste para visualizá-lo. Mas o que interessa é que esteja mais ou menos parecido (ou seja, os pontos mais ou menos no mesmo sítio)

Exercício (pág. 33)

Resolução 2.4

1. Há
2. Há
3. Não há (é Nula)
4. Há
5. Não há (é Nula)
6. Há
7. Não há (é Nula)

Exercício (pág. 34)

Resolução 2.5

1. Positiva
2. Positiva
3. Negativa
4. Negativa
5. Nula
6. Positiva
7. Nula
8. Negativa
9. Positiva

Exercício (pág. 36)

Resolução 2.6

1. Forte
2. Fraca
3. Fraca
4. Forte
5. Nula
6. Forte
7. Nula
8. Forte
9. Fraca

Exercício (pág. 37)

Resolução 2.7

1. Correlação Positiva Forte
2. Correlação Negativa Forte
3. Correlação Nula
4. Correlação Negativa Fraca

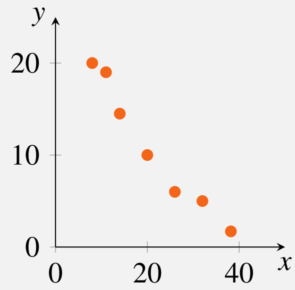
Exercício (pág. 38)

Resolução 2.8

Inserimos os dados em 2 listas na calculadora, tal como estão nesta tabela.

x	y
8	20
14	14,5
11	19
20	10
26	6
32	5
38,2	1,7

Com isto, visualizamos o diagrama de dispersão na calculadora.



Olhando para o diagrama, **pode haver correlação** (provavelmente uma **correlação negativa forte**).

Exercício (pág. 39)

Resolução 2.9

Em cada lista de números, selecionamos todos os números que estão entre -1 e 1 inclusive (calculando os números na calculadora se necessário)

1. $-1 \quad 0 \quad 1$
2. $0{,}4 \quad -0{,}7$
3. $0{,}23 \quad -0{,}425 \quad -1$
4. $\frac{3}{4} \quad -\frac{3}{4}$
5. $0 \quad -\frac{2}{e} \quad 0{,}93$

Exercício (pág. 40)

Resolução 2.10

1. Correlação Positiva
2. Correlação Positiva
3. Correlação Positiva
4. Correlação Negativa
5. Correlação Negativa
6. Correlação Nula
7. Correlação Positiva
8. Correlação Negativa

Exercício (pág. 40)

Resolução 2.11

1. Correlação Forte
2. Correlação Fraca
3. Correlação Fraca
4. Correlação Forte
5. Correlação Forte
6. Correlação Nula
7. Correlação Forte
8. Correlação Fraca

Exercício (pág. 41)

Resolução 2.12

1. Correlação Positiva Forte
2. Correlação Nula
3. Correlação Negativa Forte
4. Correlação Positiva Fraca

Exercício (pág. 41)

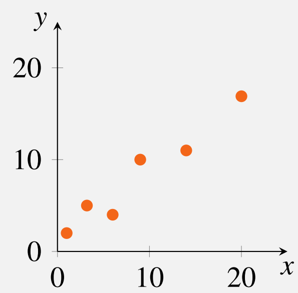
Resolução 2.13

1. $r \approx -0{,}78$
2. $r \approx 0{,}19$
3. $r \approx 0{,}47$

Exercício (pág. 42)

Resolução 2.14

1. Na calculadora, inserimos os dados em 2 listas (tal como estão na tabela da pergunta) e visualizamos o diagrama de dispersão.



   Olhando para o diagrama, **pode haver correlação**.

2. Como pode haver correlação, então calculamos o coeficiente. Fazendo a regressão linear na calculadora, obtemos

$$r \approx 0{,}97$$

   Olhando para o valor de r, temos uma **correlação positiva forte** (tal como poderíamos suspeitar ao olhar para o diagrama).

Exercício (pág. 43)

Resolução 2.15

Copiando os dados para a calculadora e usando a funcionalidade "regressão linear", obtemos os valores de a, b e, assim, a equação da reta de regressão.

1. $y = 6{,}066x + 36{,}565$
2. $y = -12{,}678x + 491{,}827$
3. $y = 0{,}680x + 1{,}052$

Nota:

- No primeiro e segundo exercícioz, inserimos os dados em 2 listas (colunas) na calculadora, tal como estão nas tabelas da pergunta.
- No terceiro exercício, inserimos os dados em 2 listas (colunas) na calculadora, tal como estão nesta tabela.

x	y
3	3,6
1,5	2,13
0,99	1,45
7,2	6
5	4,112

Exercício (pág. 44)

Resolução 2.16

Pela Lei Fundamental da Matemática, "Se queres 1 incógnita, então precisas de 1 equação com essa incógnita." Neste exercício, essa equação é a equação da reta de regressão (que usamos para calcular a incógnita x ou y).

1. Queremos y, por isso precisamos de 1 equação com y. Substituindo $x = 3$ na equação da reta $y = -2x + 16$, temos

$$\begin{aligned} &y = -2 \times 3 + 16 \\ \Leftrightarrow &y = 10 \end{aligned}$$

2. Queremos y, por isso precisamos de 1 equação com y. Substituindo $x = 3$ na equação da reta $y = 2{,}5x - 7{,}35$, temos

$$\begin{aligned} &y = 2{,}5 \times 3 - 7{,}35 \\ \Leftrightarrow &y = 0{,}15 \end{aligned}$$

3. Queremos x, por isso precisamos de 1 equação com x. Substituindo $y = 3$ na equação da reta $y = 2{,}5x - 7{,}35$, temos

$$\begin{aligned} &3 = 2{,}5x - 7{,}35 \\ \Leftrightarrow &x = \frac{3 + 7{,}35}{2{,}5} \\ \Leftrightarrow &x = 4{,}14 \end{aligned}$$

4. Queremos x, por isso precisamos de 1 equação com x. Substituindo $y = 444$ na equação da reta $y = \frac{2}{7}x + 0{,}385$, temos

$$\begin{aligned} &444 = \frac{2}{7}x + 0{,}385 \\ \Leftrightarrow &x = \frac{(444 - 0{,}385) \times 7}{2} \\ \Leftrightarrow &x = 1552{,}6525 \end{aligned}$$

5. Queremos y, por isso precisamos de 1 equação com y. Substituindo $x = 9{,}5$ na equação da reta $y = -1{,}12x + \frac{99}{2}$, temos

$$\begin{aligned} & y = -1{,}12 \times 9{,}5 + \frac{99}{2} \\ \Leftrightarrow & y = 38{,}86 \end{aligned}$$

Exercício (pág. 45)

Resolução 2.17

É só traduzires a pergunta para linguagem matemática (altura é x, peso é y), e depois ficas com um exercício exatamente igual ao anterior.

1. Queremos y (peso), por isso precisamos de 1 equação com y. Substituindo $x = 167$ (altura) na equação da reta de regressão $y = 0{,}98x - 98{,}7$, temos

$$\begin{aligned} & y = 0{,}98 \times 167 - 98{,}7 \\ \Leftrightarrow & y \approx 65 \text{ kg} \end{aligned}$$

2. Queremos y (peso), por isso precisamos de 1 equação com y. Substituindo $x = 190$ (altura) na equação da reta de regressão $y = 0{,}98x - 98{,}7$, temos

$$\begin{aligned} & y = 0{,}98 \times 190 - 98{,}7 \\ \Leftrightarrow & y \approx 88 \text{ kg} \end{aligned}$$

3. Queremos x (altura), por isso precisamos de 1 equação com x. Substituindo $y = 72$ (peso) na equação da reta $y = 0{,}98x - 98{,}7$, temos

$$\begin{aligned} & 72 = 0{,}98x - 98{,}7 \\ \Leftrightarrow & x = \frac{72 + 98{,}7}{0{,}98} \\ \Leftrightarrow & x \approx 174 \text{ cm} \end{aligned}$$

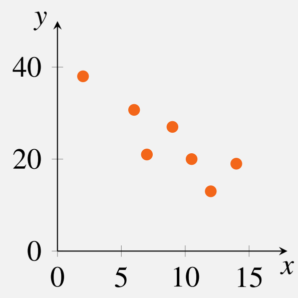
Exercício (pág. 46)

Resolução 2.18

1. Inserimos os dados em 2 listas na calculadora, tal como estão nesta tabela.

x	y
2	38
12	13
14	19
7	21
9	27
6	30,7
10,5	20

Com isto, visualizamos o diagrama de dispersão na calculadora.



Olhando para o diagrama, **pode haver correlação**.

2. Como pode haver correlação, então calculamos o coeficiente. Fazendo a regressão linear na calculadora, obtemos

$$r \approx -0{,}87$$

Olhando para o valor de r, temos uma **correlação negativa forte**. (tal como poderíamos suspeitar ao olhar para o diagrama). E como é uma correlação forte, então **os dados são bem aproximados pela reta de regressão**.

3. Por isso, podemos então calcular a reta de regressão. Olhando para a regressão linear que já tínhamos feito na calculadora, vemos também os parâmetros da reta de regressão.

$$a \approx -1{,}806$$
$$b \approx 39{,}711$$

Por isso, a equação da reta de regressão é

$$y = -1{,}806x + 39{,}711$$

Agora, queremos y, por isso precisamos de 1 equação com y. Substituindo $x = 4{,}7$ na equação da reta de regressão, obtemos

$$y = -1{,}806 \times 4{,}7 + 39{,}711$$
$$\Leftrightarrow y \approx 31$$

Exercício (pág. 46)

Resolução 2.19

Na pergunta, lendo as palavras **"forte associação linear positiva"** (e, opcionalmente, vendo também os pontos do diagrama de dispersão), concluímos que:

- **"Forte"** significa que os pontos estão muito juntos à reta de regressão, por isso, r está longe de 0 (perto de 1 ou -1) – por isso, não pode ser a opção **(A)**
- **"Positiva"** significa que o declive da reta é positivo, ou seja, $a > 0$ e, por isso, também $r > 0$) – não podem ser as opções **(B)** nem **(C)**.

Resposta: (D) (é a única opção que satisfaz essas 3 condições: r perto de 1 ou -1, $r > 0$ e $a > 0$).

Exercício (pág. 47)

Resolução 2.20

Dados:

- $x = 41$ (minutos)
- Queremos y (horas, arredondado às unidades)

(Pela Lei Fundamental da Matemática, queremos y, por isso precisamos de 1 equação com y. Qual equação? A equação da reta de regressão!)

Resposta:

1. Calculamos a equação da reta de regressão.
   - Colocamos os valores de x na lista 1 e os valores de y na lista 2 da calculadora (tal como estão na tabela da pergunta)
   - Obtemos a equação $y = 0{,}727x + 7{,}763$
2. Estimamos o valor de y para $x = 41$.

$$\begin{aligned} & y = 0{,}727 \times 41 + 7{,}763 \\ \Leftrightarrow & y \approx 38 \end{aligned}$$

3. Resposta: 38 horas

Nota: Na tua resposta, **escreve sempre as listas que inseriste na calculadora** (porque esse passo costuma estar nos critérios de avaliação do exame).

- **Se a pergunta já tiver a tabela organizada tal como a inseririas na calculadora** (como acontece neste exercício), então basta escreveres como eu escrevi nesta resolução.
- Mas **se não tiver a tabela organizada**, então escreve tu próprio a tabela toda tal como a inseriste na calculadora (no fundo, desenhas uma tabela como a deste exercício, com o x e y bem identificados).

Exercício (pág. 48)