Álgebra Linear e Geometria Analítica

O Resumo Completo em Exercícios

ricardo–ferreira.pt

★★★ = Mais Importante
★ = Menos Importante

Links? Nos cartões, comentários e descrição

0

Como usar este vídeo

ricardo—ferreira.pt

0 Como usar este vídeo

1. Faz exercícios até encalhar (e corrige imediatamente)
2. Só quando encalhares, revê a matéria

Como NÃO usar?

- Só ver: ver o exercício e pensar que sabes resolver o exercício

Como usar?

- Como Ficha de Exercícios: pausa, lê enunciado, resolve e vê resolução
- Como Guia de Estudo: percebe as matérias mais importantes e procura mais exercícios (e vídeos) desses
- Esclarecer Dúvidas: que surgem enquanto resolves outras fichas

ricardo—ferreira.pt

Diferente do que aprendeste?

- Definições: se o nome é o mesmo, as definições serão equivalentes (em testes, usa as definições que aprendeste)
- Notação: não te foques no símbolo, mas no significado por detrás dele (em testes, normalmente podes usar notação que não aprendeste desde que a definas)

Por onde começar?

- Se não sabes o que procuras: continua a ver!
- Se sabes o que procuras: vê o índice inicial e depois clica nos capítulos do YouTube

1

Sistemas de Equações Lineares

ricardo−ferreira.pt

1.1 Sistemas 1: Resolver por Condensação ou Eliminação Gauss − Jordan ★★★

1.2 Classificar Sistemas ★★★

Já sei resolver

$$\begin{cases} x + 4y = 7 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

...mas é possível resolver

$$\begin{cases} 3z = 3 \\ 2x + 4y + 8z = -2 \\ 2x + 2y + 6z = 2 \end{cases}$$

?

...ou AINDA maior!?

SIM e SIM ☺!

ricardo−ferreira.pt

Resolve o sistema

$$\begin{cases} 3z = 3 \\ 2x + 4y + 8z = -2 \\ 2x + 2y + 6z = 2 \end{cases}$$

Condensação ou Eliminação Gauss – Jordan
("Cima, 1 Limpa")

$$\begin{cases} x + 4y = 7 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

Cima: $L_1 \leftrightarrow L_2$

1: λL

Limpa: $L_1 + \lambda L_2$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

Verifica!

1 → "Pivô"

$\boxed{S = \{(3,1)\}}$

Forma escalonada reduzida por linhas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & -2 \\ 2 & 2 & 6 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{Cima}]{L_1 \leftrightarrow L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 6 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[1]{\left(\frac{1}{2}\right)L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 6 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{Limpa}]{L_3 + (-2)L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{Cima}]{L_2 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[1]{\left(-\frac{1}{2}\right)L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{Limpa}]{L_1 + (-2)L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[1]{\left(\frac{1}{3}\right)L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{Limpa}]{\substack{L_1 + (-2)L_3 \\ L_2 + (-1)L_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \\ z = 1 \end{cases}$$

$\boxed{S = \{(1,-3,1)\}}$

Verifica!

$$\begin{cases} 3 \times 1 = 3 \\ 2 \times 1 + 4 \times (-3) + 8 \times 1 = -2 \\ 2 \times 1 + 2 \times (-3) + 6 \times 1 = 2 \end{cases}$$

Resolve e classifica os sistemas seguintes.

$$\begin{cases} 3z = 3 \\ 2x + 4y + 8z = -2 \\ 2x + 2y + 6z = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + 2y + 3z = 4 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ z = 1 \end{cases}$$

Classificar Sistema

Impossível (0 sol): 0=1

Possível Determinado (1 sol): Todas variáveis fixas

Possível Indeterminado (∞ sol): Nem todas variáveis fixas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & -2 \\ 2 & 2 & 6 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]. \text{ Temos } \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \\ z = 1 \end{cases}$$

logo $S = \{(1,-3,1)\}$ (1 sol: sistema possível determinado)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2+(-1)L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{\left(\frac{1}{4}\right)L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\text{Temos } \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 0 = 1 \end{cases},$$

logo $S = \emptyset$ (0 sol: sistema impossível)

ricardo−ferreira.pt

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1+(-3)L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\text{Temos } \begin{cases} x + 2y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2y \\ z = 1 \end{cases},$$

logo $S = \{(1-2y, y, 1):\ y \in \mathbb{R}\}$

(∞ sol: sistema possível indeterminado)

2

Álgebra de Matrizes

ricardo−ferreira.pt

As matrizes fazem lembrar os vetores (ou até os números reais ℝ)...

...será que as matrizes têm as mesmas operações e propriedades?

ricardo—ferreira.pt

NÃO, MAS QUASE ☺!

Seja $A=\begin{bmatrix}3 & 0\\ -4 & -5\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 4\\ -2 & 1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}3 & 2 & -4\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$.

Se possível, calcula $-3A, A+B, A+C, BC, CB, A+2BC$

$$-3A=-3\begin{bmatrix}3 & 0\\ -4 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9 & 0\\ 12 & 15\end{bmatrix}$$

1. Multiplicação por Escalar: "multiplica todos"

$$A+B=\begin{bmatrix}3 & 0\\ -4 & -5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 4\\ -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 4\\ -6 & -4\end{bmatrix}$$

2. Soma: "coord a coord"
$m\times n$ só soma com $m\times n$
(e dá $m\times n$)

$$A+C=\begin{bmatrix}3 & 0\\ -4 & -5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 2 & -4\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}=\text{Não dá!}$$

$$BC=\begin{bmatrix}1 & 4\\ -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2 & -4\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 2 & -8\\ -5 & -4 & 7\end{bmatrix}$$

$$CB=\begin{bmatrix}3 & 2 & -4\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 4\\ -2 & 1\end{bmatrix}=\text{Não dá!}$$

ricardo−ferreira.pt

3. Multiplicação: "produto escalar, linha com coluna"
$m\times n$ só multiplica com $n\times o$
(e dá $m\times o$)

$$A+2BC=\begin{bmatrix}3 & 0\\ -4 & -5\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1 & 4\\ -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2 & -4\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 0\\ -4 & -5\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}7 & 2 & -8\\ -5 & -4 & 7\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3 & 0\\ -4 & -5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}14 & 4 & -16\\ -10 & -8 & 14\end{bmatrix}=\text{Não dá!}$$

Ordem das 3 Operações
Como em $\mathbb{R}$ e vetores
(Multiplica primeiro, soma depois!)

Sejam A, B $n \times n$. Usando as propriedades das operações matrizes:

a) Escreve matrizes C e D tal que $CD \neq DC$

b) Mostra que $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

c) Mostra que$(A^3 + I)^2 = A^6 + 2A^3 + I$

d) Mostra que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Propriedades das Operações

Tudo como em $\mathbb{R}$ ou nos vetores, exceto $AB \neq BA$.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$CD = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\neq$$

$$DC = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ricardo−ferreira.pt

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A(A+B) + B(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

Propriedades Distributivas

$A(B+C) = AB + AC$

$(A+B)C = AC + BC$

$$(A^3 + I)^2 = (A^3)^2 + A^3 I + IA^3 + I^2 = A^6 + A^3 + A^3 + I = A^6 + 2A^3 + I$$

Identidade da Multiplicação I

$AI = IA = A$

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

logo$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Inversa da Multiplicação A^{-1}

$AA^{-1} = A^{-1}A = I$

a) Escreve I_1, I_2 e I_3 (as matrizes identidade $1 \times 1, 2 \times 2$ e 3×3).

b) Escreve A^T, matriz transposta de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

c) Calcula $\text{car}(A)$, a característica de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

d) Calcula $\text{tr}(B)$, traço de $B = \begin{bmatrix} \pi & 2 \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$

$$I_1 = [1], I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Identidade I_n

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(Diagonal 1, resto 0)

Transposta A^T

"Linhas ficam colunas, colunas ficam linhas"

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Característica $\text{car}(A)$

Nº de pivôs

(de $\text{fer}(A)$)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{car}(A) = 2$$

Traço $\text{tr}(A)$

$$\text{tr}(A) := a_{11} + \cdots + a_{nn}$$

para $A = \begin{bmatrix} a_{11} & * & * \\ * & \ddots & * \\ * & * & a_{nn} \end{bmatrix}$

$$B = \begin{bmatrix} \pi & 2 \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{tr}(B) = \pi + (-1) = \pi - 1$$

2.4 Inversa 1: Calcular por Condensação/Eliminação Gauss – Jordan ★★★

Se existir, calcula $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -7 \end{bmatrix}^{-1}$, $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$ (inversa)

Se A^{-1} existe, então $[A|I] \rightarrow [I|A^{-1}]$

$$[A|I] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -2 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2+2L_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1+(-4)L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -7 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] = [I|A^{-1}]$$

logo $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -7 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

invertível, não singular, não degenerada

$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$ não existe!

A^{-1} só pode existir para matrizes quadradas $n \times n$

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[(1/3)L_3]{L_3+(-2)L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1+(-1)L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \neq [I|A^{-1}]$$

logo $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$ não existe!

não invertível
singular
degenerada

$[A|I] \rightarrow [I|A^{-1}]$: A^{-1} existe
$[A|I] \rightarrow [\cancel{I}|*]$: A^{-1} não existe

Sabendo que $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -4 & -3 & 6 \\ -2 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, resolve $\begin{cases} 3z = 3 \\ 2x + 4y + 8z = -2 \\ 2x + 2y + 6z = 2 \end{cases}$.

Sistema na forma de matriz $A\vec{x} = \vec{b}$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Sistema pela inversa

Se A^{-1} existe, então

$A\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -4 & -3 & 6 \\ -2 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{S = \{(1, -3, 1)\}}$$

Verifica!

$$\begin{cases} 3 \times 1 = 3 \\ 2 \times 1 + 4 \times (-3) + 8 \times 1 = -2 \\ 2 \times 1 + 2 \times (-3) + 6 \times 1 = 2 \end{cases}$$

3

O Determinante

ricardo—ferreira.pt

3.1 Calcular determinante 1x1, 2x2, 3x3 (Regra de Sarrus e Teorema de Laplace) ★★★

3.2 Calcular determinante $n \times n$ (Teorema de Laplace e Operações Elementares) ★★★

3.3 Inversa 2: Calcular pelo Determinante e Matriz Adjunta ★

3.4 Propriedades do Determinante (Teorema de Binet e outras) ★★

3.5 Sistemas 3: Resolver pelo Determinante (Regra de Cramer) ★★

3.6 Usos do Determinante: Verificar Matrizes Invertíveis e Calcular Áreas e Volumes ★★

Vimos que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Este $ad - bc$ é mesmo suspeito...

...será que há fórmulas parecidas para matriz $3 \times 3, 4 \times 4$ e maior?

SIM ☺!

ricardo−ferreira.pt

3.1 Calcular determinante 1x1, 2x2, 3x3 (Regra de Sarrus e Teorema de Laplace) ★★★

Calcula $|-1|$, $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ (determinante)

Determinante: Escolhe um número de cada linha e coluna da matriz multiplica-os e dá-hes sinal + ou − (de acordo com uma certa regra). Soma todas estas possíveis multiplicações e tens o determinante!

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$|-1| = -1$$

$$|k| = k$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-8) = 8$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{matrix}$$

Regra de Sarrus

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

$$= (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-20 + 6 + 0) - (-12 + 0 - 2) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = +1 \times \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \times \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times 18 - 0 - 1 \times 18 = 0$$

ricardo−ferreira.pt

Teorema de Laplace/Expansão em Cofatores

1. Escolhe a linha/coluna com mais zeros
2. Para o 1º nº dessa linha/coluna:
   a. Conta $+, -, +, -$ (do a_{11} até esse nº) e escreve o último sinal
   b. Escreve esse número
   c. Multiplica pelo determinante da matriz que ignora essa linha e coluna
3. Repete o ponto 2 para os outros números dessa linha/coluna

3.2 Calcular determinante $n \times n$ (Teorema de Laplace e Operações Elementares) ★★★

Calcula $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$

Teorema de Laplace/Expansão em Cofatores

1. Escolhe linha/coluna com mais zeros
2. Sinal, Número × Determinante

$A \to N$:

$L_a + kL_b: |N| = |A|$

$L_a \leftrightarrow L_b: |N| = -|A|$

$kL_a: |N| = k|A|$

Tb operações de coluna!

Normalizada: $\det(\mathrm{I}) = \mathrm{I}$
Multilinear
Alternada

Resolução 1

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} \overset{\substack{L_2+(-1)L_1 \\ L_3+(-1)L_1 \\ L_4+(-2)L_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = +1 \times \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 14 = 20$$

Resolução 2

$$\overset{\substack{(1/2)L_2 \\ (1/2)L_3 \\ L_4+3L_2}}{=} 2^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 7 & 3/2 \end{vmatrix} \overset{L_4+(-7)L_3}{=} 2^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2^2 \times (1 \times 1 \times 1 \times 5) = 20$$

Se A só tem zeros acima ou abaixo da diagonal principal, então
$\det(A) = a_{11} \times a_{22} \times \cdots a_{nn}$

Resolução 3

$$\overset{(1/5)L_4}{\vdots} \quad 2^2 \times 5 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 20$$

Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$. Calcula A^{-1} pela fórmula $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$.

1. $\det(A)$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times (-4) = -12$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

2. $\operatorname{adj}(A)$

$$\operatorname{cof}(A) = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 & -4 \\ 6 & -6 & 0 \\ 12 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{adj}(A) = \left(\operatorname{cof}(A)\right)^T = \begin{bmatrix} 8 & 4 & -4 \\ 6 & -6 & 0 \\ 12 & 6 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 12 \\ 4 & -6 & 6 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) = \frac{1}{-12} \begin{bmatrix} 8 & 6 & 12 \\ 4 & -6 & 6 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/3 & -1/2 & 1 \\ -1/3 & 1/2 & -1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ricardo−ferreira.pt

Matriz Adjunta $\operatorname{adj}(A)$

$\operatorname{adj}(A) \coloneqq \left(\operatorname{cof}(A)\right)^T$

Matriz dos Cofatores $\operatorname{cof}(A)$

Pega na matriz A e substitui cada Número pelo seu Sinal × Determinante do Teorema de Laplace

Sejam A, B duas matrizes 2×2, com $\det(A) = 3$ e $\det(B) = -2$.
Calcula $\det(AB)$, $\det(A^2 B)$, $\det(5A)$, $\det(A^{-1})$, $\det(A^T)$, $\det(4B^T A^{-3})$

Teorema de Binet

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

(Podemos tirar potências para dentro e para fora)

$\det(AB) = \det(A)\det(B) = 3 \times (-2) = -6$

$\det(A^2 B) = (\det(A))^2 \det(B) = 3^2 \times (-2) = -18$

$\det(5A) = \det \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \det(A) = 5^2 \times 3 = 75$

Para A $n \times n$:
$\det(kA) = k^n \det(A)$

$\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$

$\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$

$\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

$\det(A^T) = \det(A) = 3$

$\det(A^T) = \det(A)$

$\det(4B^T A^{-3}) = 4^2 \det(B)(\det(A))^{-3} = 4^2 \times (-2) \times 3^{-3} = -\frac{32}{27}$

ricardo−ferreira.pt

Usando a regra de Cramer, resolve o sistema $\begin{cases} 3z = 3 \\ 2x + 4y + 8z = -2 \\ 2x + 2y + 6z = 2 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

1. $\det(A)$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 3 \times (-4) = -12$$

$S = \{(1, -3, 1)\}$

Verifica: $\begin{cases} 3 \times 1 = 3 \\ 2 \times 1 + 4 \times (-3) + 8 \times 1 = -2 \\ 2 \times 1 + 2 \times (-3) + 6 \times 1 = 2 \end{cases}$

2. $\det(A_i) / \det(A)$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 8 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{3 \times 8 + 3 \times (-12)}{-12} = \frac{-12}{-12} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & 8 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{-3 \times (-4) + 3 \times 8}{-12} = \frac{36}{-12} = -3$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{3 \times (-4)}{-12} = \frac{-12}{-12} = 1$$

ricardo−ferreira.pt

Regra de Cramer

Seja A $n \times n$, com $\det(A) \neq 0$.

Então $A\vec{x} = \vec{b}$ tem solução $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, com

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, \qquad i = 1, \dots, n$$

onde A_i é a matriz obtida a partir de A ao trocar a sua i − ésima coluna por $\vec{b}$.

Estratégia: Primeiro, $\det(A)$. Depois, $\det(A_i) / \det(A)$.

3.6 Usos do Determinante: Verificar Matrizes Invertíveis e Calcular Áreas e Volumes ★★

Verifica se $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ são invertíveis.

$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$ (Invertível)

$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ (Não invertível)

$\boxed{A \text{ invertível} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0}$

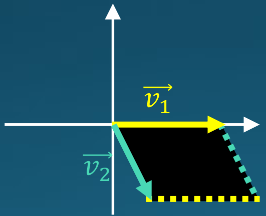
Calcula a área do paralelogramo definido pelos vetores:

a) $\overrightarrow{v_1} = (3,0)$ e $\overrightarrow{v_2} = (1,-2)$

b) $\overrightarrow{v_1} = (3,0)$ e $\overrightarrow{v_2} = (1,0)$

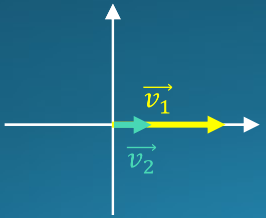
Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$:

$\mathrm{A}_{Paralel}(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) = |\det(A)| = |-6| = 6$



Seja $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$:

$\mathrm{A}_{Paralel}(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) = |\det(B)| = |0| = 0$



Volume n − dimensional

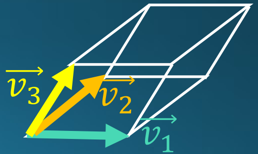
$V_{Paralel}(\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n}) = |\det(A)|$

onde $A = \begin{bmatrix} | & & | \\ \overrightarrow{v_1} & \cdots & \overrightarrow{v_n} \\ | & & | \end{bmatrix}$

$\mathbb{R}$: "Comprimento"

$\mathbb{R}^2$: "Área"

$\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4, \dots$: "Volume"



4

Espaços Vetoriais

ricardo−ferreira.pt

Para calcular volumes pelo determinante, imaginámos que as linhas ou colunas da matriz eram vetores...

...será que usar esta perspetiva noutros contextos nos leva a algum lado?

SIIIIM ☺!

ricardo–ferreira.pt

Espaço vetorial V

Espaço onde podes somar e multiplicar por escalares sem problemas.

Exemplos

1. $\mathbb{R}^n$
2. $\{\text{Funções } f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$
3. $P_2 = \{a + bt + ct^2 : a, b, c \in \mathbb{R}\}$

(tudo com soma e multiplicação por escalar usuais)

Considera, em $\mathbb{R}^2$, o conjunto $U = \{(1,2),(3,6)\}$

a) Mostra que o vetor $(-4,-8)$ é combinação linear dos vetores de U

b) Mostra que o vetor $(1,3)$ não é combinação linear dos vetores de U

É combinação linear

Queremos que $x\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4\\-8\end{bmatrix}$, ou seja, $\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4\\-8\end{bmatrix}$ tenha solução.

$$\left[\begin{array}{cc|c}1 & 3 & -4\\2 & 6 & -8\end{array}\right] \xrightarrow{L_2+(-2)L_1} \left[\begin{array}{cc|c}1 & 3 & -4\\0 & 0 & 0\end{array}\right]$$, ou seja, $\begin{cases}x+3y=-4\\0=0\end{cases}$.

$S = \left\{\begin{bmatrix}-3y-4\\y\end{bmatrix} : y \in \mathbb{R}\right\}$. Tem solução, como queríamos.

Não é combinação linear

Queremos que $x\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$, ou seja, $\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ não tenha solução.

Combinação Linear

$x_1\overrightarrow{v_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{v_n}$

$$\left[\begin{array}{cc|c}1 & 3 & 1\\2 & 6 & 3\end{array}\right] \xrightarrow{L_2+(-2)L_1} \left[\begin{array}{cc|c}1 & 3 & 1\\0 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow{L_1+(-1)L_2} \left[\begin{array}{cc|c}1 & 3 & 0\\0 & 0 & 1\end{array}\right]$$, ou seja,

$\begin{cases}x+3y=0\\0=1\end{cases}$. $S=\emptyset$. Não tem solução, como queríamos.

Na forma de matriz $A\vec{x}$:

$$x_1\overrightarrow{v_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{v_n} = \begin{bmatrix}| & & |\\\overrightarrow{v_1} & \cdots & \overrightarrow{v_n}\\| & & |\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

a) Verifica se $U = \{(1,1),(2,2),(0,1)\}$ gera $\mathbb{R}^2$

b) Verifica se $U = \{(1,1),(2,2),(0,1)\}$ é linearmente independente

Gerar $\mathbb{R}^2$

Resolvemos $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & b_1 \\ 1 & 2 & 1 & b_2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1+(-1)L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & b_2 - b_1 \end{array}\right]$$

$S = \{(b_1 - 2y, y, b_2 - b_1): y \in \mathbb{R}\}$

Tem sempre solução, por isso U gera $\mathbb{R}^2$.

$\{\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n}\}$ gera V

Qualquer $\vec{b} \in V$ é comb. linear de $\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n}$

$\Leftrightarrow x_1\overrightarrow{v_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{v_n} = \vec{b}$ tem sol $\forall \vec{b} \in V$

$\Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{b}$ tem sol $\forall \vec{b} \in V$

Linearmente independente

Resolvemos $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1+(-1)L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$S = \{(-2y, y, 0): y \in \mathbb{R}\}$

A solução (0,0,0) não é única, por isso U não é linearmente independente.

$\{\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n}\}$ linearmente independente

$0\overrightarrow{v_1} + \cdots + 0\overrightarrow{v_n}$ única comb. linear que dá $\vec{0}$

$\Leftrightarrow x_1\overrightarrow{v_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{v_n} = \vec{0}$ tem única sol $(0, \dots, 0)$

$\Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{0}$ tem única sol $(0, \dots, 0)$

Linearmente Dependente

"Não é linearmente independente"

Rapidinha

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1+(-1)L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Gerar $\mathbb{R}^n$: "Todas as linhas têm pivô"

Todas as linhas têm pivô por isso U gera $\mathbb{R}^2$

Linearmente Independentes: "Todas as colunas têm pivô"

Nem todas as colunas têm pivô por isso U não é linearmente independente

a) Verifica se $\{(1,2),(0,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$ e determina $\dim(\mathbb{R}^2)$.
b) É imediato que $\{(1,2)\}$ não é uma base de $\mathbb{R}^2$. Porquê?
c) É imediato que $\{(1,2),(0,1),(1.1)\}$ não é uma base de $\mathbb{R}^2$. Porquê?

Base

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow{L_1+(-1)L_2} \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

1. Todas as linhas têm pivô, por isso gera $\mathbb{R}^2$.
2. Todas as colunas têm pivô, por isso é linearmente independente

Logo é uma base de $\mathbb{R}^2$.

$\{\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_n}\}$ Base de V
1. Gera V
2. É linearmente independente

Base de $\mathbb{R}^n$
Todas as linhas e colunas têm pivô

Dimensão de V: $\dim(V)$
Número de vetores de qualquer base de V

(Todas as bases de V têm o mesmo nº de vetores)

Dimensão

$\mathbb{R}^2$ tem base de 2 vetores, ou seja, $\dim(\mathbb{R}^2)=2$

$\dim(\mathbb{R}^2)=2$, mas $\{(1,2)\}$ tem 1 vetor.
(nunca pode gerar)

$$\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

$\dim(\mathbb{R}^2)=2$, mas $\{(1,2),(0,1),(1.1)\}$ tem 3 vetores.
(nunca pode ser linearmente independente)

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

ricardo−ferreira.pt

Base Canónica de $\mathbb{R}^n$

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\ \vdots\\0\end{bmatrix},\dots,\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\1\end{bmatrix}\right\}$$

$\dim(\mathbb{R}^n)=n$

$\dim(\{\vec{0}\})=0$

4.5 "Peneirar" (Base $\mathbb{R}^n$ a partir de conjunto gerador ou linearmente independente) ★★★

a) Sabendo que $U = \{(1,2),(3,6),(1,3)\}$ gera $\mathbb{R}^2$, escreve uma base de $\mathbb{R}^2$ que só contenha vetores de U

b) Escreve uma base de $\mathbb{R}^2$ que contenha o vetor $(1,-1)$.

Base a partir de conjunto gerador ("peneirar")

1. Eliminação Gauss-Jordan em $\begin{bmatrix} | & & | \\ \vec{v_1} & \cdots & \vec{v_n} \\ | & & | \end{bmatrix}$

2. Escolhe os $\vec{v_i}$ que correspondem às colunas com pivô

Peneirar não muda o espaço gerado

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2+(-2)L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1+(-1)L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

logo $\{(1,2),(1,3)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$

Ao $(1,-1)$, juntas a base canónica e peneiras tudo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2+L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1+(-1)L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

Base a partir de conjunto linearmente independente
Junta-lhe a base canónica e peneira tudo!

logo $\{(1,-1),(1,0)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$

ricardo−ferreira.pt

Seja $B = \{(1,1),(1,2)\}$ uma base de $\mathbb{R}^2$.

a) Calcula, na base canónica, o vetor que na base B tem coordenadas $(2,1)$.
b) Calcula, na base B, o vetor que na base canónica tem coordenadas $(2,1)$.
c) Usando a matriz mudança de base apropriada, calcula, na base canónica, o vetor que, na base B, tem coordenadas (a,b).
d) Usando a matriz mudança de base apropriada, calcula, na base B, o vetor que, na base canónica, tem coordenadas (a,b).

Significado de Coordenadas

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_B = x \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_B + y \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_B$$

$$\overset{\text{MB}}{=} x \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y \\ x + 2y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_B = 2 \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_B + 1 \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_B \overset{\text{MB}}{=} 2 \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1) \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \overset{\text{MB}}{=} 3 \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_B + (-1) \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}_B$$

$$M_{C \leftarrow B} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} a + b \\ a + 2b \end{bmatrix}$$

$$M_{B \leftarrow C} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a - b \\ -a + b \end{bmatrix}_B$$

ricardo−ferreira.pt

Matriz que muda Base B para Canónica

$$M_{C \leftarrow B} := \begin{bmatrix} | & & | \\ \overrightarrow{b_1} & \cdots & \overrightarrow{b_n} \\ | & & | \end{bmatrix}$$

$\left(B = \text{base } \{\overrightarrow{b_1}, \cdots, \overrightarrow{b_n}\}, C = \text{base canónica}\right)$

Mudança contrária: $M_{B \leftarrow C} = (M_{C \leftarrow B})^{-1}$

5

Subespaços vetoriais

ricardo−ferreira. pt

5.1 Subespaço Vetorial (definição) ★★

5.2 Espaço linhas, espaço colunas e espaço nulo/núcleo ★★★

5.3 Base e Dimensão de um Subespaço ★★★

5.4Interseção e Soma de Subespaços ★★

Já investigámos bem os espaços vetoriais $\mathbb{R}^n$ ...

...mas será que existem outros espaços vetoriais DENTRO de $\mathbb{R}^n$?

SIM ☺!

ricardo−ferreira.pt

Verifica se $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}, U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}$ são subespaços de $\mathbb{R}^2$.

Subespaço vetorial W

- Subconjunto não vazio de um espaço vetorial
- $k\vec{v} \in W$
- $\vec{u} + \vec{v} \in W$

$(\vec{u}, \vec{v} \in W, k \in \mathbb{R})$

- W é subconjunto não vazio do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ $\big((0,0) \in W\big)$

$\boxed{\vec{u} + k\vec{v} \in W}$

Seja $\vec{u} = (u_1, u_2) \in W, \vec{v} = (v_1, v_2) \in W$ e $k \in \mathbb{R}$ (então $u_1 + u_2 = 0$ e $v_1 + v_2 = 0$):

- $k\vec{v} = (kv_1, kv_2) \rightsquigarrow kv_1 + kv_2 = k(v_1 + v_2) = 0$, logo $k\vec{v} \in W$
- $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2) \rightsquigarrow u_1 + v_1 + u_2 + v_2 = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) = 0$, logo $\vec{u} + \vec{v} \in W$

W é subespaço de $\mathbb{R}^2$

- U é subconjunto não vazio do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ $\big((0,1) \in U\big)$

Seja $\vec{u} = (u_1, u_2) \in U, \vec{v} = (v_1, v_2) \in U$ e $k \in \mathbb{R}$ (então $u_1 + u_2 = 1$ e $v_1 + v_2 = 1$):

- $k\vec{v} = (kv_1, kv_2) \rightsquigarrow kv_1 + kv_2 = k(v_1 + v_2) = k$, logo, por exemplo, $2\vec{v} \notin U$

U não é subespaço de $\mathbb{R}^2$

Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$. Calcula uma base e a dimensão:

a) do seu espaço linhas $L(A)$

b) do seu espaço colunas $C(A)$

c) do seu espaço nulo ou núcleo $N(A)$

Espaço Linhas $L(A)$

$L(A) := L\{\overrightarrow{L_1.}, \cdots, \overrightarrow{L_n}\}$

Gerar: ✓

Lin. indep. (peneirar):

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Base } L(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

$\dim L(A) = 2$

Espaço Colunas $C(A)$

$C(A) := L\{\overrightarrow{C_1.}, \cdots, \overrightarrow{C_n}\}$

Gerar: ✓

Lin. indep. (peneirar):

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Base } C(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$$

$\dim C(A) = 2$

Subespaço gerado por $\{\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_n}\}$

$L\{\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_n}\} := \{x_1 \overrightarrow{v_1} + \cdots + x_n \overrightarrow{v_n} : x_i \in \mathbb{R}\}$

Seja $A=\begin{bmatrix}0&0&2&4\\1&1&1&2\\0&0&4&8\end{bmatrix}$. Calcula uma base e a dimensão:

a) do seu espaço linhas $L(A)$
b) do seu espaço colunas $C(A)$
c) do seu espaço nulo ou núcleo $N(A)$

$$\begin{bmatrix}0&0&2&4\\1&1&1&2\\0&0&4&8\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Gerar: $N(A)=N(\mathrm{fer}(A))=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^4:\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$

$$=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^4:x_1=-x_2,x_3=-2x_4\right\}=\left\{\begin{bmatrix}-x_2\\x_2\\-2x_4\\x_4\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^4\right\}=\left\{x_2\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}0\\0\\-2\\1\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^4\right\}=L\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\-2\\1\end{bmatrix}\right\}$$

Lin. indep (peneirar):

$$\begin{bmatrix}-1&0\\1&0\\0&-2\\0&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

Base $N(A)=\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\-2\\1\end{bmatrix}\right\}$

$\dim N(A)=2$

Espaço Nulo/Núcleo $N(A)$
$N(A):=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n:A\vec{x}=\vec{0}\}$

"Basta ver fer(A)"
$N(A)=N(\mathrm{fer}(A))$

"Operações de Linha não mudam $N(A)$ (nem $L(A)$)"

ricardo−ferreira.pt

5.2 Calcular base e dimensão do espaço linhas, espaço colunas e espaço nulo/núcleo ★★★

Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$. Calcula uma base e a dimensão:

a) do seu espaço linhas $L(A)$
b) do seu espaço colunas $C(A)$
c) do seu espaço nulo ou núcleo $N(A)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rapidinha!

Base Espaço Linhas $L(A)$
Escolhe as linhas com pivô

Base Espaço Colunas $C(A)$
Peneirar
(vê as colunas com pivô e escolhe as respetivas colunas de A)

ricardo−ferreira.pt

Base Espaço Nulo/Núcleo $N(A)$
1. Colunas sem pivô: nº de vetores e mete I
2. Vetores resolvem $\text{fer}(A)\vec{x} = \vec{0}$

$$\text{Base } L(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\dim L(A) = 2$$

$$\text{Base } C(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\dim C(A) = 2$$

$$= \text{car}(A) =$$

$$\text{Base } N(A) = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\dim N(A) = 2$$

"Operações de Linha não mudam $N(A)$ nem $L(A)$. Mas mudam $C(A)$!"

$$\dim(L(A)) = \dim(C(A))$$
$$\dim(L(A)) + \dim(N(A)) = \text{nº colunas } A$$

Calcula uma base e a dimensão dos subespaços

$$U = L\{(1,1),(2,2)\} \text{ e } W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y - z = 0\}.$$

Base de Subespaço?

Escreve como $C(A)$ ou $N(A)$

$C(A)$ ou $N(A)$: $U = L\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\right\} = C\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{bmatrix}$

Base de $L\{\overrightarrow{v_1},\cdots,\overrightarrow{v_n}\}$?

Base de $C(A)$!

Base $C(A)$ (peneirar): $\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{bmatrix} \xrightarrow{L_2+(-1)L_1} \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 0\end{bmatrix}$

Base $U = \left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}$, logo $\dim(U) = 1$.

$C(A)$ ou $N(A)$: $W = \left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix}0 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = 0\right\} = N\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\end{bmatrix}$

Base de $\{\vec{x} \in \mathbb{R}: \text{eqs.}\}$?

Base de $N(A)$!

Base $N(A)$: $N\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\end{bmatrix} = N\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\end{bmatrix} = L\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$

Base $W = \left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$, logo $\dim(W) = 2$.

Calcula uma base e a dimensão dos subespaços seguintes.

$$R = N\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\end{bmatrix} \cap C\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \qquad S = N\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\end{bmatrix} + C\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Se U, W são subespaços, há subespaços:
$U + W := \{\vec{u} + \vec{w} \colon \vec{u} \in U, \vec{w} \in W\}$
$U \cap W := \{\vec{v} \colon \vec{v} \in U \wedge \vec{v} \in W\}$

$\cap$ fácil com $N(A)$: junta linhas (eqs)!
$+$ fácil com $C(A)$: junta colunas $(\vec{v_i})$!

Passar $C(A) \to N(A)$
Coordenadas Especiais $\to$ Equações

1. Mesma língua:

$$C\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \left\{a\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3\right\} = \left\{\begin{bmatrix}a+b\\ a\\ b\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3\right\} = \left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \colon x = y + z\right\}$$

$$= \left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \colon \begin{bmatrix}1 & -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = 0\right\} = N\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

2. Base $\cap$: $R = N\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix} = N\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix} \Rightarrow$ Base $R = \left\{\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$, $\dim(R) = 1$

---

1. Mesma língua:

$$N\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\end{bmatrix} = L\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\} = C\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Passar $N(A) \to C(A)$
Base de $N(A)$!

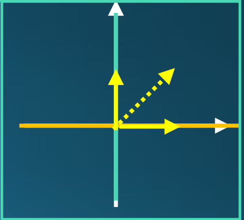
2. Base $+$: $S = C\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix} \Rightarrow$ Base $S = \left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$,

$\dim(S) = 3$

"Sabes para $C(A)$ e $N(A) \Rightarrow$ Sabes para qualquer subespaço!"

ricardo−ferreira.pt

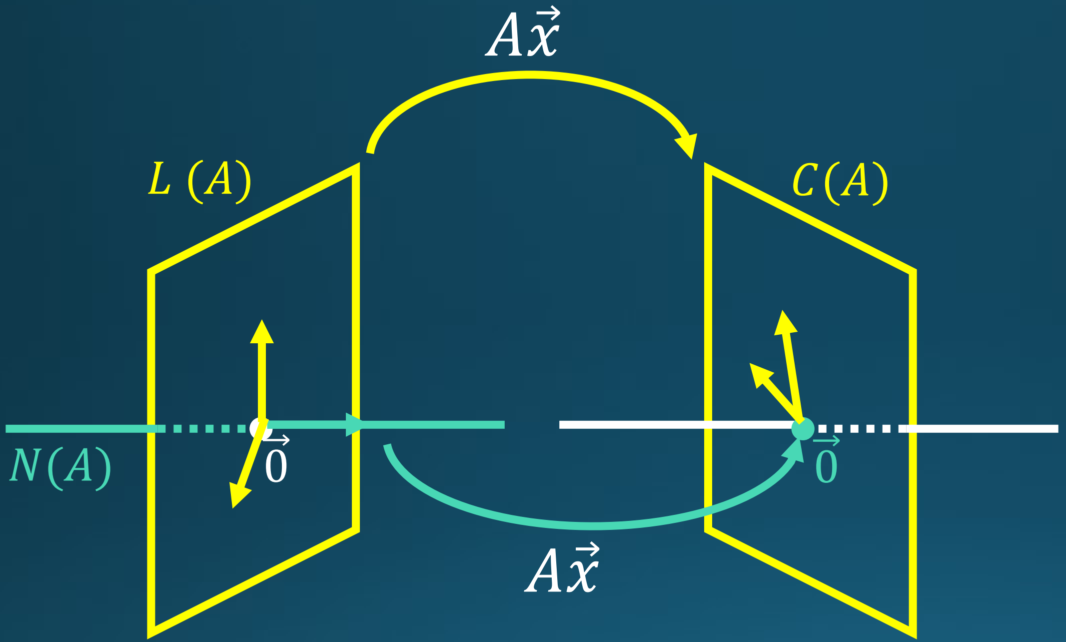
$U \cup W := \{\vec{v} \colon \vec{v} \in U \vee \vec{v} \in W\}$
nem sempre é subespaço



$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$

Resumo!

$\mathbb{R}^3$ antes $\xrightarrow{A\vec{x}}$ $\mathbb{R}^3$ depois



$$\dim(L(A)) = \dim(C(A))$$
$$\dim(L(A)) + \dim(N(A)) = \text{nº colunas } A$$

6

Transformações Lineares

ricardo−ferreira.pt

$A\vec{x}$ é uma função ...

... será que conseguimos definir um tipo de funções com as mesmas propriedades que a função $A\vec{x}$?

ricardo—ferreira.pt

SIM ☺!

Diz se as funções seguintes são transformações lineares.

a) $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(x,y) = (x+y, -3y)$

b) $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x,y,z) = (z,\ x,\ y+1)$

Transformação Linear Função que preserva mult. por escalar e soma:

- $T(k\vec{v}) = kT(\vec{v})$
- $T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$

Seja $\vec{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ e $k \in \mathbb{R}$.

$$T(k\vec{v}) = T\left(k\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} kv_1 \\ kv_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} kv_1 + kv_2 \\ -3kv_2 \end{bmatrix}$$

$=$

$$kT(\vec{v}) = kT\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) = k\begin{bmatrix} v_1 + v_2 \\ -3v_2 \end{bmatrix}$$

$$T(\vec{u}+\vec{v}) = T\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 + u_2 + v_2 \\ -3u_2 - 3v_2 \end{bmatrix}$$

$=$

$$T(\vec{u}) + T(\vec{v}) = T\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u_1 + u_2 \\ -3u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 + v_2 \\ -3v_2 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{T(\vec{u} + k\vec{v}) = T(\vec{u}) + kT(\vec{v})}$$

É transformação linear

Seja $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3, \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ e $k \in \mathbb{R}$.

$$T(k\vec{v}) = T\left(k\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} kv_1 \\ kv_2 \\ kv_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} kv_3 \\ kv_1 \\ kv_2 + 1 \end{bmatrix}, \quad kT(\vec{v}) = k\begin{bmatrix} v_3 \\ v_1 \\ v_2 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kv_3 \\ kv_1 \\ kv_2 + k \end{bmatrix}$$

NÃO É transformação linear

(porque , por exemplo, $T(3\vec{v}) \neq 3T(\vec{v})$)

Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear $T(x, y) = (x + y, -3y)$
Calcula a representação matricial de T na base canónica $\{(1,0), (0,1)\}$.

Tenho T, quero A (representação matricial)

$$A = \begin{bmatrix} | & | & | \\ T(\overrightarrow{b_1}) & \cdots & T(\overrightarrow{b_n}) \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

$\left(\text{onde } T(\vec{x}) = A\vec{x} \text{ na base } \left\{\overrightarrow{b_1}, \dots, \overrightarrow{b_n}\right\}\right)$

- $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 + 0 \\ -3 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
- $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 + 1 \\ -3 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$
- $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

Verifica!

Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear representada por $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ na base canónica.
Escreve a expressão que define T, na forma $T(x, y) = (\cdots, \cdots)$

- $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y \\ -3y \end{bmatrix}$, ou seja, $T(x, y) = (x + y, -3y)$

Tenho A, quero T
$T(\vec{x}) = A\vec{x}$? Multiplica!

Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a t. linear representada por $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ na base canónica.
Calcula a representação matricial de T na base $\{(1,1),(1,2)\}$.

Matriz que representa T na base B

$$A_B = M_{B\leftarrow C} A_C M_{C\leftarrow B}$$

(A_B e A_C representam T nas bases B e canónica, respetivamente)

- $M_{C\leftarrow B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
- $M_{B\leftarrow C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$
- $A_B = M_{B\leftarrow C} A_C M_{C\leftarrow B}$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ -5 & -9 \end{bmatrix}$$

ricardo−ferreira.pt

Matriz que muda Base B para Canónica

$$M_{C\leftarrow B} := \begin{bmatrix} | & & | \\ \overrightarrow{b_1} & \cdots & \overrightarrow{b_n} \\ | & & | \end{bmatrix}$$

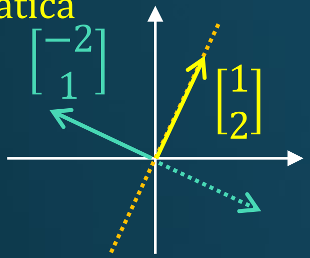
$\left(B = \text{base } \{\overrightarrow{b_1}, \cdots, \overrightarrow{b_n}\}, C = \text{base canónica}\right)$

Mudança contrária: $M_{B\leftarrow C} = (M_{C\leftarrow B})^{-1}$

6.4 Representação Matricial de Reflexões e Rotações em $\mathbb{R}^2$

Seja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a reflexão de eixo $y = 2x$.
Calcula a representação matricial de T na base canónica.

1. Base Simpática



1. Escolhe uma base simpática
2. Escreve a matriz de T na base simpática
3. Muda a matriz para a base desejada

Seja B a base $\{(1,2),(-2,1)\}$

2. Matriz de T na base simpática

- $T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_B\right) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_B$
- $T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_B\right) = -\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}_B$
- $A_B = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}_B = x\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_B + y\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_B = x\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$$

ricardo−ferreira.pt

3. Matriz de T na base desejada (mudança)

- $M_{C\leftarrow B} = \begin{bmatrix}1 & -2\\2 & 1\end{bmatrix}$
- $M_{B\leftarrow C} = \begin{bmatrix}1 & -2\\2 & 1\end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}1 & 2\\-2 & 1\end{bmatrix}$
- $A_C = M_{C\leftarrow B}A_B M_{B\leftarrow C} = \begin{bmatrix}1 & -2\\2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1 & 2\\-2 & 1\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}1 & -2\\2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & -1\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}-3 & 4\\4 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3/5 & 4/5\\4/5 & 3/5\end{bmatrix}$

Matriz Rotação θ, Centro $(0,0)$

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

Sejam $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$T(x, y, z) = (3z, 2x + 4y + 8z, 2x + 2y + 6z)$$

Resolve, em $\mathbb{R}^3$, a equação $T(x, y, z) = (3, -2, 2)$

Na base canónica: $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$$T(\vec{x}) = A\vec{x}$$

(após escolheres uma base)

$T(\vec{x}) = \vec{b}$?

Resolve $A\vec{x} = \vec{b}$

Resolver: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & -2 \\ 2 & 2 & 6 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\boxed{S = \{(1, -3, 1)\}}$$

Verifica!

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \times 1 \\ 2 \times 1 + 4 \times (-3) + 8 \times 1 \\ 2 \times 1 + 2 \times (-3) + 6 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \checkmark$$

Seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear $T(x, y, z) = (x, x + y + z)$

a) Calcula uma base do núcleo $N(T)$. T é injetiva?

b) Calcula uma base da imagem $\mathrm{Im}(T)$. T é sobrejetiva?

Núcleo $N(T)$

$N(T) \coloneqq \{\vec{x} \in V : T(\vec{x}) = \vec{0}\}$

Se $T(\vec{x}) = A\vec{x}$:

$N(T) = N(A)$,

$\mathrm{Im}(T) = C(A)$

Imagem $\mathrm{Im}(T)$

$\mathrm{Im}(T) \coloneqq \{\vec{b} \in W : T(\vec{x}) = \vec{b}\}$

T Injetiva

$T(\vec{x}) = \vec{b}$ tem ≤ 1 sol.

$N(T) = \{\vec{0}\}$

(0 vetores base)

T Sobrejetiva

$T(\vec{x}) = \vec{b}$ tem ≥ 1 sol.

$\mathrm{Im}(T) =$ Espaço Todo

(Máx vetores base)

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Base $N(T)$: $\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

$N(T) \neq \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$: não injetiva.

Base $\mathrm{Im}(T)$: $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

$\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^2$: sobrejetiva.

Sejam $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ as transformações lineares definidas por $T(x, y) = (x + y, y)$ e $S(x, y) = (x, x + y, x)$

a) Mostra que T é bijetiva e calcula a sua inversa T^{-1}

b) Calcula a composta $S \circ T$

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} N(T)\text{: 0 vetores (injetiva)} \\ \mathrm{Im}(T)\text{: 2 vetores (sobrejetiva)} \end{array}\right\} \text{Bijetiva!}$$

Bijetiva (Injetiva e Sobrejetiva)

$T(\vec{x}) = \vec{b}$ tem 1 sol $\forall \vec{b}$

$N(T) = \{\vec{0}\}$ e $\mathrm{Im}(T) =$ Espaço Todo

Inversa T^{-1}

Se $T(\vec{x}) = A\vec{x}$, então

$$T^{-1}(\vec{x}) = A^{-1}\vec{x}$$

Inversa: $$T^{-1}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y \\ y \end{bmatrix}$$

$$S\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$S \circ T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y \\ x + 2y \\ x + y \end{bmatrix}$$

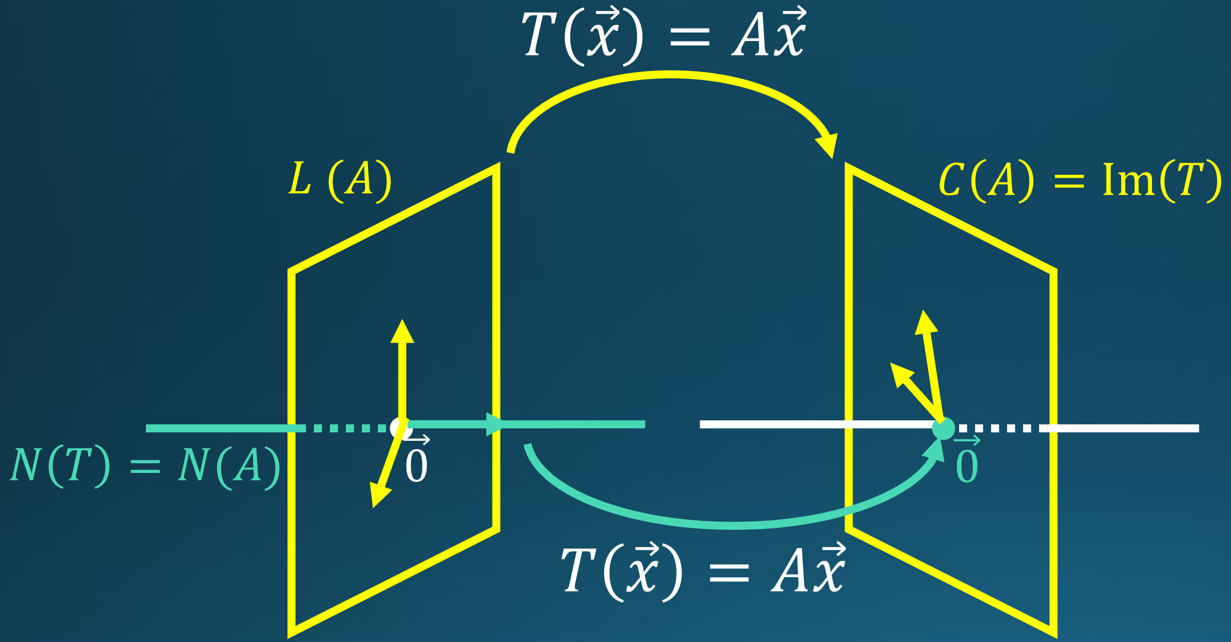
Composta $S \circ T$

Se $S(\vec{x}) = A\vec{x}$, $T(\vec{x}) = B\vec{x}$, então

$$S \circ T(\vec{x}) = AB\vec{x}$$

Resumo!

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \text{ antes} \arrow[r, shift left, "T(\vec{x}) = A\vec{x}"] & \mathbb{R}^3 \text{ depois} \arrow[l, shift left, "T^{-1}(\vec{x}) = A^{-1}\vec{x}"] \end{tikzcd}$$



$$\boxed{\begin{gathered} \dim(L(A)) = \dim(C(A)) \\ \dim(L(A)) + \dim(N(A)) = \text{nº colunas } A \\ \dim(\mathrm{Im}(A)) + \dim(N(T)) = \text{nº colunas } A \end{gathered}}$$

7

Diagonalização e Forma Canónica de Jordan

ricardo—ferreira.pt

7.1 Diagonalização de Matrizes (Valores Próprios e Vetores Próprios) ★★★

7.2 Forma Canónica de Jordan ★★

7.3 Forma Canónica de Jordan (exemplo longo) ★★

Se podemos escolher a base de T que nos dá mais jeito (para ter um A fácil de trabalhar)...

... será que T tem sempre uma base em que A é diagonal?

ricardo−ferreira.pt

NÃO, MAS QUASE ☺!

Verifica se $\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$ são diagonalizáveis em $\mathbb{R}$.
Para cada matriz diagonalizável A, determina uma matriz mudança de base M e uma matriz diagonal D tal que $D = M^{-1}AM$

Matriz A Diagonalizável
Existe matriz invertível M e matriz diagonal D com
$D = M^{-1}AM$

1. Valores Próprios

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\1 & 1-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda$$

$$\det(A-\lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \lor \lambda = 2.$$

2. Vetores Próprios

$$\lambda = 0: N(A-\lambda I) = N\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} = N\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix} = L\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right\}$$

$$\lambda = 2: N(A-\lambda I) = N\begin{bmatrix}-1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix} = N\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 0\end{bmatrix} = L\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}$$

3. M e D

Logo $M = M_{C\leftarrow B} = \begin{bmatrix}-1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$

Verifica: $M^{-1}AM = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 2\end{bmatrix} = D$

A, B Semelhantes
Existe M com
$B = M^{-1}AM$
("representam mesmo T em bases diferentes")

ricardo−ferreira.pt

Estratégia
1. Valores próprios: zeros de $\det(A-\lambda I)$
2. Vetores próprios: bases dos $N(A-\lambda I)$
3. M e D: M base de vetores próprios, D diagonal de valores próprios

Valores e vetores próprios
Se $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, ou seja, $(A-\lambda I)\vec{x} = \vec{0}$, então λ é valor próprio e $\vec{x} \neq \vec{0}$ é vetor próprio.

Verifica se $\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$ são diagonalizáveis em $\mathbb{R}$.
Para cada matriz diagonalizável A, determina uma matriz mudança de base M e uma matriz diagonal D tal que $D = M^{-1}AM$

Polinómio Característico $p(\lambda)$: $\det(A-\lambda I)$
Multiplicidade Algébrica $\mathrm{ma}(\lambda_i)$: Nº de vezes que λ_i é zero de $\det(A-\lambda I)$

1. Valores Próprios

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix}1-\lambda & 0\\3 & 1-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)^2$$

$$\det(A-\lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

Subespaço Próprio E_{λ_i}: $N(A-\lambda_i I)$
Multiplicidade Geométrica $\mathrm{mg}(\lambda_i)$: $\dim\big(N(A-\lambda_i I)\big)$

2. Vetores Próprios

$$\lambda = 1: N(A-\lambda I) = N\begin{bmatrix}0 & 0\\3 & 0\end{bmatrix} = N\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} = L\left\{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

Não diagonalizável em $\mathbb{R}$ (Só 1 vetor base e não 2)

---

1. Valores Próprios

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix}-\lambda & -1\\1 & -\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2+1$$

$$\det(A-\lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i \notin \mathbb{R}$$

Não diagonalizável em $\mathbb{R}$ (só em $\mathbb{C}$)

ricardo−ferreira.pt

Estratégia
1. Valores próprios: zeros de $\det(A-\lambda I)$
2. Vetores próprios: bases dos $N(A-\lambda I)$
3. M e D: M base de vetores próprios, D diagonal de valores próprios

A Diagonalizável
Há base de vetores próprios
($\mathrm{ma}(\lambda_i) = \mathrm{mg}(\lambda_i)\ \forall i$)

A não Diagonalizável em $\mathbb{R}$
Não há base de vetores próprios
(vetores a menos ou em $\mathbb{C}$)

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$. Determina uma matriz mudança de base M e uma matriz J na forma canónica de Jordan tal que $J = M^{-1}AM$.

1. Valores Próprios

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

Qualquer A tem J na F. C. Jordan com $J = M^{-1}AM$.

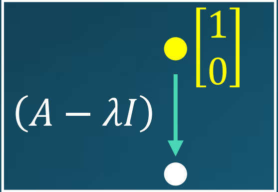
2. Vetores Próprios Generalizados

2.1 Bases de $N\left((A-\lambda I)^i\right)$

$$\lambda = 1: N(A - \lambda I) = N\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = N\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = L\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$N\left((A-\lambda I)^2\right) = N\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = L\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

2.2 Sequências de Vetores (Diagrama)



$$(A - \lambda \mathrm{I})\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

3. M e J

Logo $M = M_{C \leftarrow B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ e $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Verifica : $M^{-1}AM = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = J$ ✓

Forma Canónica de Jordan

Matriz diagonal por blocos

$$A = \begin{bmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & J_{m_n}(\lambda_n) \end{bmatrix},$$

com

$$J_{m_i}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

(matriz $m_i \times m_i$)

Estratégia

1. Valores próprios: zeros de $\det(A - \lambda I)$
2. Vetores próprios generalizados:
   1. bases dos $N\left((A-\lambda I)^i\right)$ até ter vetores todos
   2. últimos vetores adicionados iniciam sequências
3. M e J: M base de vetores próprios generalizados, J diagonal por blocos de valores próprios e 1

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. Determina uma matriz mudança de base M e uma matriz J na forma canónica de Jordan tal que $J = M^{-1}AM$.

1. Valores Próprios

$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^4(-2-\lambda)$, $\quad \det(A-\lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = -2$

2. Vetores Próprios Generalizados

2.1 Bases de $N\left((A-\lambda I)^i\right)$

$$\lambda = 1: N(A-\lambda I) = N\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = N\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = L\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

$$N\left((A-\lambda I)^2\right) = N\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = N\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = L\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

$$N\left((A-\lambda I)^3\right) = N\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -27 \end{bmatrix} = N\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = L\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

$$\lambda = -2: N(A-\lambda I) = N\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = N\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = L\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

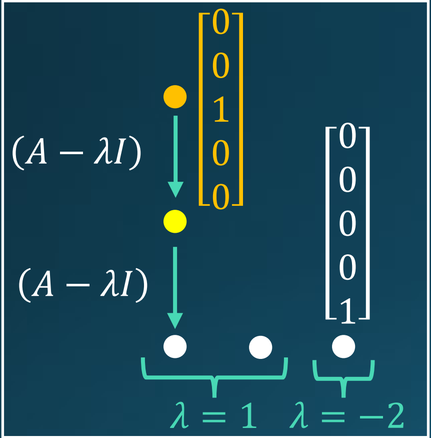
Determina M e uma matriz J na forma canónica de Jordan tal que $J = M^{-1}AM$.

2. Vetores Próprios Generalizados

2.1 Bases de $N\left((A-\lambda I)^i\right)$

$$\lambda = 1 : L\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-1\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}, \lambda = -2 : L\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

2.2 Sequências de Vetores (Diagrama)



$$(A-\lambda I)\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\2\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$(A-\lambda I)\begin{bmatrix}0\\2\\0\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\2\\0\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix} \rightsquigarrow \text{Sobrou } \begin{bmatrix}0\\-1\\0\\1\\0\end{bmatrix}.$$

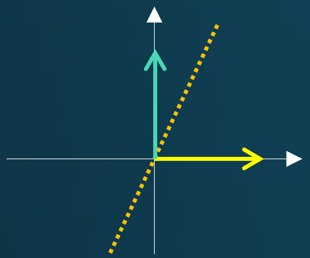
3. M e J

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

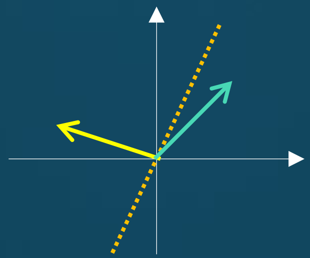
Verifica:

Em vez de $M^{-1}AM = J$, verifica $AM = MJ$

Resumo!



$T(\vec{x})$

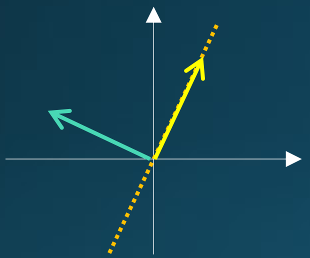


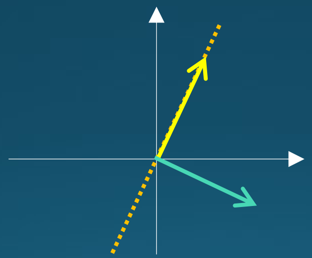
$M_{C \leftarrow B}$

$(M_{C \leftarrow B})^{-1}$

$T(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \vec{x}$

(às vezes não há)





$T(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \vec{x}$

(há sempre)

Transformações Lineares $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\leftrightarrow$ Formas Canónicas de Jordan $n \times n$

8

Produto Interno e Ortogonalidade

ricardo—ferreira.pt

Em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, o produto escalar dava-nos o conceito de comprimento e ângulo...

... será que conseguimos criar outros produtos escalares (para estes e outros espaços vetoriais)?

SIM ☺!

ricardo–ferreira.pt

Mostra que a função $\langle , \rangle: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $\langle (u_1, u_2), (v_1, v_2) \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2$ é um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

Produto interno (ou Produto escalar)

Função $\langle , \rangle: V \times V \to \mathbb{R}$ que satisfaz:

1. Positividade: $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle > 0$, para $\vec{u} \neq \vec{0}$
2. Simetria: $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$
3. Linearidade: $\langle \vec{u} + k\vec{w}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + k\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$

Seja $\vec{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2, \vec{w} = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$ e $k \in \mathbb{R}$

1. Positividade ("1 vetor")

   Se $\vec{u} \neq \vec{0}$, então $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \langle (u_1, u_2), (u_1, u_2) \rangle = u_1^2 + u_2^2 > 0$

2. Simetria ("2 vetores")

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle (u_1, u_2), (v_1, v_2) \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2$$
$$\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = \langle (v_1, v_2), (u_1, u_2) \rangle = v_1 u_1 + v_2 u_2$$
$$=$$

3. Linearidade ("3 vetores")

$$\langle \vec{u} + k\vec{w}, \vec{v} \rangle = \langle (u_1 + kw_1, u_2 + kw_2), (v_1, v_2) \rangle = u_1 v_1 + kw_1 v_1 + u_2 v_2 + kw_2 v_2$$
$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + k\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle = (u_1 v_1 + u_2 v_2) + k(w_1 v_1 + w_2 v_2) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + kw_1 v_1 + kw_2 v_2$$
$$=$$

Concluímos que é um produto interno.

$\boxed{\text{Produto interno/escalar usual em } \mathbb{R}^n: \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n}$

ricardo−ferreira.pt

$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v}}$

$\boxed{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \vec{u}^T P \vec{v}}$

Espaço Euclideano

1. Espaço vetorial real
2. de dimensão finita
3. com produto interno

Considera, em $\mathbb{R}^2$, o produto interno $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 + 3 x_2 y_2$.

a) Calcula a norma $\|\vec{x}\|$, para um qualquer vetor $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$
b) Calcula o ângulo determinado pelos vetores $\vec{u} = (1,0)$ e $\vec{v} = (1,1)$
c) Verifica se os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais
d) Calcula a projeção ortogonal do vetor $\vec{u}$ sobre o vetor $\vec{v}$.

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + 3x_2^2}$$

Norma

$$\|\vec{x}\| := \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}\right) = \arccos\left(\frac{1+0}{\sqrt{1} \times \sqrt{4}}\right)$$

$$= \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = 30°$$

Ângulo

$$\theta := \arccos\left(\frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}\right)$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \cos\theta$$

$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 1 \times 1 + 3 \times 0 \times 1 = 1 \neq 0$, logo $\vec{u}, \vec{v}$ não são ortogonais

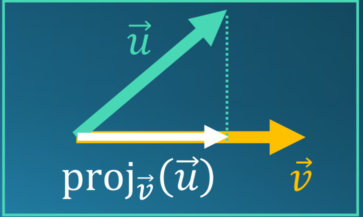
Vetores Ortogonais

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$$

$$\mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \left(\frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2}\right)\vec{v} = \frac{1}{4}(1,1) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

Projeção ortogonal

$$\mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) := \left(\frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2}\right)\vec{v}$$



Seja $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ o produto interno usual em $\mathbb{R}^3$ e

$$\overrightarrow{a_1} = (1,1,0), \overrightarrow{a_2} = (1,0,0), \overrightarrow{a_3} = (0,2,0).$$

Calcula uma base ortonormada para $U = L\{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}\}$.

1. Base

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

logo $\{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}\}$ é uma base de U

2. Orto

$$\overrightarrow{b_1} := \overrightarrow{a_1}$$

$$\overrightarrow{b_2} := \overrightarrow{a_2} - \text{proj}_{\overrightarrow{a_1}}(\overrightarrow{a_2}) = \overrightarrow{a_2} - \left(\frac{\langle \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2} \rangle}{\|\overrightarrow{a_1}\|^2} \right) \overrightarrow{a_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \left(\frac{1+0+0}{1^2+1^2+0^2} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

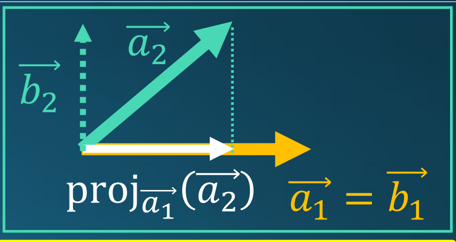
3. Normada

$$\overrightarrow{c_1} := \frac{\overrightarrow{b_1}}{\|\overrightarrow{b_1}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

$$\overrightarrow{c_2} := \frac{\overrightarrow{b_2}}{\|\overrightarrow{b_2}\|} = \frac{1}{1/\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0 \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

$\{\overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{c_2}\}$ é base ortonormada de U.

Base ortonormada:
- Base
- Ortogonal: $\left\langle \overrightarrow{b_i}, \overrightarrow{b_j} \right\rangle = 0$
- "Normada": $\left\| \overrightarrow{b_i} \right\| = 1$



Criar Base Ortonormada
1. Base: Arranja uma base
2. Orto: Gram – Schmidt para ortogonalizar
3. Normada: Divide pela norma para normalizar

Ortogonalização Gram-Schmidt com base de n vetores

$$\overrightarrow{b_1} \coloneqq \overrightarrow{a_1}$$
$$\overrightarrow{b_2} \coloneqq \overrightarrow{a_2} - \mathrm{proj}_{\overrightarrow{a_1}}(\overrightarrow{a_2})$$
$$\overrightarrow{b_3} \coloneqq \overrightarrow{a_3} - \mathrm{proj}_{\overrightarrow{a_1}}(\overrightarrow{a_3}) - \mathrm{proj}_{\overrightarrow{a_2}}(\overrightarrow{a_3})$$
$$\vdots$$
$$\overrightarrow{b_n} \coloneqq \overrightarrow{a_n} - \mathrm{proj}_{\overrightarrow{a_1}}(\overrightarrow{a_n}) - \cdots - \mathrm{proj}_{\overrightarrow{a_{n-1}}}(\overrightarrow{a_n})$$

"Pega no próximo vetor base e tira − lhe todas as projeções sobre os vetores base anteriores"

8.4 Calcular Projeção Ortogonal e Distância de um vetor a um subespaço

Em $\mathbb{R}^3$, com o produto interno usual, considera o subespaço

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - z = 0\}$$

a) Calcula a projeção ortogonal de $\vec{u} = (1,0,0)$ sobre W

b) Calcula a distância de $\vec{u} = (1,0,0)$ a W

Projeção Ortogonal de $\vec{u}$ sobre W

Se $\{\overrightarrow{w_1}, \dots, \overrightarrow{w_n}\}$ é uma base de W, então

$$P_W(\vec{u}) := \text{proj}_{\overrightarrow{w_1}}(\vec{u}) + \cdots + \text{proj}_{\overrightarrow{w_n}}(\vec{u})$$

1. Base de W

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \right\} = N\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = L\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},$$

logo W tem base $\{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}\}$, com $\overrightarrow{w_1} = (0,1,0)$ e $\overrightarrow{w_2} = (1,0,1)$.

2. Projeção sobre W

$$P_W(\vec{u}) = \text{proj}_{\overrightarrow{w_1}}(\vec{u}) + \text{proj}_{\overrightarrow{w_2}}(\vec{u}) = \left(\frac{\langle \vec{u}, \overrightarrow{w_1} \rangle}{\|\overrightarrow{w_1}\|^2}\right)\overrightarrow{w_1} + \left(\frac{\langle \vec{u}, \overrightarrow{w_2} \rangle}{\|\overrightarrow{w_2}\|^2}\right)\overrightarrow{w_2}$$

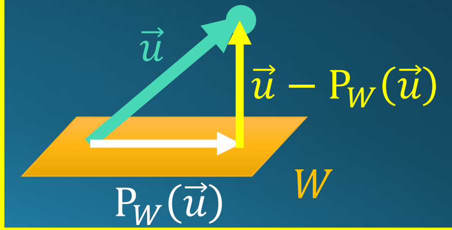
$$= \left(\frac{0+0+0}{0^2+0^2+1^2}\right)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \left(\frac{1+0+0}{1^2+0^2+1^2}\right)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

3. Distância a W

$$\vec{u} - P_W(\vec{u}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$ logo $$d(\vec{u}, W) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Distância de $\vec{u}$ a W

$$d(\vec{u}, W) := \|\vec{u} - P_W(\vec{u})\|$$



Considera, em $\mathbb{R}^3$, o subespaço $W = L\{(-1,1,2)\}$. Calcula uma base e a dimensão do seu complemento ortogonal, $W^\perp$, quando o produto interno é:

a) O produto interno usual em $\mathbb{R}^3$

b) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 2x_1y_1 + 6x_2y_2 + x_3y_3$

Complemento Ortogonal de W, $W^\perp$

$$W^\perp = \{\vec{v} \in V : \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle = 0\ \forall \vec{w} \in W\}$$

Base de $W^\perp$ (P. I. Usual)

$$W = L(A)$$
$$W^\perp = N(A)$$
$$\left(\{\vec{w_1}, \dots, \vec{w_n}\} \text{ base de } W, A = \begin{bmatrix} - & \vec{w_1} & - \\ - & \vdots & - \\ - & \vec{w_n} & - \end{bmatrix} \right)$$

$$W^\perp = N\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$= N\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = L\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},$$

Base $W^\perp$: $\{(1,1,0), (2,0,1)\}$

$\dim(W^\perp) = 2$

Base de $W^\perp$ (P. I. Qualquer)

$$W = L(A)$$
$$W^\perp = N(AP)$$
$$\left(\{\vec{w_1}, \dots, \vec{w_n}\} \text{ base de } W, A = \begin{bmatrix} - & \vec{w_1} & - \\ - & \vdots & - \\ - & \vec{w_n} & - \end{bmatrix}, \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x}^T P \vec{y} \right)$$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$W^\perp = N\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$
$$= N\begin{bmatrix} -2 & 6 & 2 \end{bmatrix} = N\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$
$$= L\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},$$

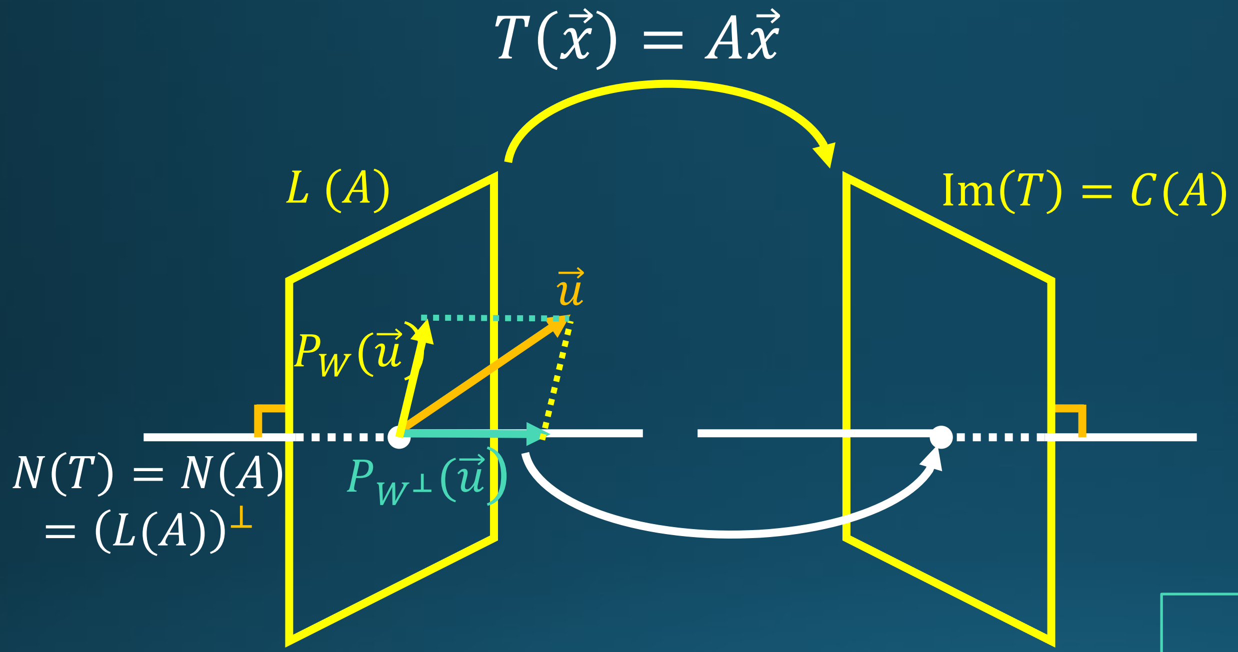
ricardo−ferreira.pt

Base $W^\perp$: $\{(3,1,0), (1,0,1)\}$

$\dim(W^\perp) = 2$

$$W^\perp = \left\{ \vec{v} \in V : \begin{pmatrix} \vec{w}_1 P \vec{v} = 0 \\ \vdots \\ \vec{w}_n P \vec{v} = 0 \end{pmatrix} \right\}$$
$$= \{\vec{v} \in V : AP\vec{v} = \vec{0}\} = N(AP)$$

Resumo!



$$\boxed{\vec{u} = P_W(\vec{u}) + P_{W^\perp}(\vec{u})}$$

Propriedades $W^\perp$

$$W + W^\perp = V$$

$$\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim(V)$$

Se $A\vec{x}: V \to W$, então

$$L(A) + C(A) = V$$

$$\dim(L(A)) + \dim(C(A)) = \dim(V)$$

9

Outros Exemplos e Aplicações

ricardo—ferreira.pt

9.1 Espaço Vetorial dos Polinómios de grau menor ou igual a 2 e coeficientes reais ★★

9.2 Produto Externo (ou Vetorial) e Produto Misto ★

9.3 Classificar Formas Quadráticas (pelos valores próprios) ★

Já vimos tanta Álgebra Linear...

... será que já vimos tudo?

ricardo−ferreira.pt

NEM LÁ PERTO ☺!

(mas este video está quase ☺!)

Considera $P_2 = \{p(t) = a + bt + ct^2 : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ o espaço vetorial dos polinómios de grau ≤ 2 e coeficientes reais.

a) Calcula uma base de P_2 e escreve $2 - 5t^2$ como matriz nessa base.
b) Calcula uma base do subespaço $W = \{p(t) \in P_2 : p(0) = 0\}$
c) Escreve a matriz de $T(p(t)) = p'(t)$ na base $\{1, t, t^2\}$
d) Usando c), determina as soluções da equação $p'(t) = 2t$
e) Para $\langle p(t), q(t)\rangle = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p''(0)q''(0)$, calcula $||p(t)||$ para qualquer $p(t) \in P_2$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Gerar: } P_2 = L\{1, t, t^2\} \\ \text{Lin. indep: } a + bt + ct^2 = 0 \Rightarrow a, b, c = 0\end{array}\right\} \text{Base } P_2 : \{1, t, t^2\}$$

$$2 - 5t^2 = 2 \times 1 - 5 \times t^2 = 2 \times \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} - 5 \times \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\0\\-5\end{bmatrix}$$

W
$= \{p(t) \in P_2 : p(0) = 0\}$
$= \{a + bt + ct^2 : b, c \in \mathbb{R}, a = 0\}$

$\longrightarrow \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a = 0\}$

$$= \left\{\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} = 0\right\}$$

$$= N\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Base: $\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$

Base W: $\{t, t^2\}$ $\longleftarrow$

Fora de $\mathbb{R}^n$? Volta a $\mathbb{R}^n$!

$$\begin{array}{ccc} V & & \mathbb{R}^3 \\ \text{Base } \{v_1, v_2, v_3\} & \longrightarrow & \text{Base } \left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\} \\ & & \text{Contas} \downarrow \\ \text{Resposta} & \longleftarrow & \text{Resposta}\end{array}$$

Considera $P_2 = \{p(t) = a + bt + ct^2 : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ o espaço vetorial dos polinómios de grau ≤ 2 e coeficientes reais.

a) Calcula uma base de P_2 e escreve $2 - 5t^2$ como matriz nessa base.

b) Calcula uma base do subespaço $W = \{p(t) \in P_2 : p(0) = 0\}$

c) Escreve a matriz de $T(p(t)) = p'(t)$ na base $\{1, t, t^2\}$

d) Usando c), determina as soluções da equação $p'(t) = 2t$

e) Para $\langle p(t), q(t)\rangle = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p''(0)q''(0)$, calcula $\|p(t)\|$ para qualquer $p(t) \in P_2$

$$A = \begin{bmatrix} | & | & | \\ T(1) & T(t) & T(t^2) \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$T(1) = 1' = 0,$
$T(t) = t' = 1,$
$T(t^2) = (t^2)' = 2t$

ricardo−ferreira.pt

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \text{logo} \begin{cases} b = 0 \\ c = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$S = \{(a, 0, 1) : a \in \mathbb{R}\}$, ou seja, $S = \{a + t^2 : a \in \mathbb{R}\}$

$$\|p(t)\| = \sqrt{\langle p(t), p(t)\rangle}$$
$$= \sqrt{\langle a + bt + ct^2, a + bt + ct^2\rangle}$$
$$= \sqrt{a^2 + b^2 + (2c)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + 4c^2}$$

$p'(t) = b + 2ct$
$p''(t) = 2c$

Fora de $\mathbb{R}^n$? Volta a $\mathbb{R}^n$!

$$\begin{array}{ccc} V & & \mathbb{R}^3 \\ \text{Base } \{v_1, v_2, v_3\} & \longrightarrow & \text{Base } \left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\} \\ & & \downarrow \text{Contas} \\ \text{Resposta} & \longleftarrow & \text{Resposta} \end{array}$$

Sejam $\vec{u} = (1,1,0), \vec{v} = (-1,1,0), \vec{w} = (1,1,1)$.
Calcula o produto externo $\vec{u} \times \vec{v}$ e o produto misto $\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{b_1} & \vec{b_2} & \vec{b_3} \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{b_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \vec{b_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + \vec{b_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\vec{b_3} = 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Produto Externo (ou vetorial)

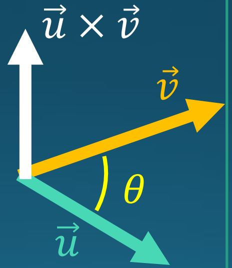
$$\vec{u} \times \vec{v} := \begin{vmatrix} \vec{b_1} & \vec{b_2} & \vec{b_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$\{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}\}$ base canónica $\mathbb{R}^3$

$\vec{u} \times \vec{v}$ Geometricamente

$$\vec{u} \times \vec{v} = (\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \text{ sen } \theta)\vec{n}$$

1. $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$
$= \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| |\text{sen } \theta|$
$= A_{Paralel}(\vec{u}, \vec{v})$
2. Direção: $\perp \vec{u}, \vec{v}$
3. Sentido: sen θ



ricardo−ferreira.pt

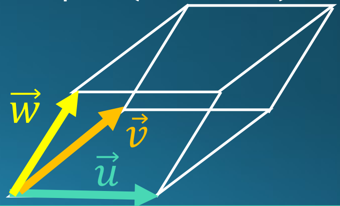
Produto Misto

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle$ Geometricamente

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle| = V_{Paralel}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$
$$= \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \left|\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v} \times \vec{w}}) \text{sen}(\widehat{\vec{v}, \vec{w}})\right|$$



Classifica a forma quadrática $Q(x,y) = -x^2 - y^2 + 2xy$ em definida positiva, definida negativa, semidefinida positiva, semidefinida negativa ou indefinida.

Forma Quadrática

Função $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ só com termos de 2º grau: $Q(\vec{x}) \coloneqq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i x_j$

$$Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$$

(A simétrica)

1. Escreve $Q(\vec{x})$ na forma $\vec{x}^T A \vec{x}$
2. Calcula valores próprios de A
3. Classifica:
   - Def. Pos: $\lambda_i > 0$
   - Def. Neg: $\lambda_i < 0$
   - Semidef. Pos: $\lambda_i \geq 0$
   - Semidef. Neg: $\lambda_i \leq 0$
   - Indef: $\lambda_i > 0$ e $\lambda_j < 0$

1. $Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$

- $Q(x,y) = -x^2 - y^2 + 2xy = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} & \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

2. Valores Próprios

- $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 + 2\lambda = \lambda(\lambda+2)$
- $\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = -2$

3. Classificar

- Todos os valores próprios são ≤ 0, logo Q é semidefinida negativa.

10

RESUMÃO!

ricardo—ferreira.pt

Estás a gostar?

Dá um like!

👍

ricardo—ferreira.pt

Ferramentas

Sistemas $A\vec{x} = \vec{b}$ ou $T(\vec{x}) = \vec{b}$: $\left[A\middle|\vec{b}\right]$ ("cima, 1, limpa") 1.1

A^{-1}: $[A|I] \to [I|A^{-1}]$ ou $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ 2.4

$\det(A)$: $k, ad-bc$, Laplace + Operações de Linha 3.1, 3.2

Espaços Vetoriais

1 $\text{fer}\begin{bmatrix} \overrightarrow{b_1} & \cdots & \overrightarrow{b_n} \end{bmatrix}$ 1.1

2 Base (gerar + lin indep):

$\mathbb{R}^n$ $\begin{cases} \text{Gerar: todas linhas têm pivô} \\ \text{Lin indep: todas colunas têm pivô} \end{cases}$ 4.3, 4.4

$L(A)$: linhas com pivô 5.2

$C(A)$: colunas originais com pivô (peneirar)

$N(A) := N(\text{fer}(A)) \rightsquigarrow$ colunas sem pivô: I

W: Escreve como $C(A)$ ou $N(A)$ 5.3

3 $\dim(V)$: nº de vetores base 4.4

Transformações Lineares

1 $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ 6.2

$\left(A = \begin{bmatrix} T\left(\overrightarrow{b_1}\right) & \cdots & T\left(\overrightarrow{b_n}\right) \end{bmatrix}\right)$

2 $T^{-1}(\vec{x}) = A^{-1}\vec{x}$ 6.7

$S \circ T(\vec{x}) = BA\vec{x}$

$\text{Im}(T) = C(A)$

$N(T) = N(A)$ 6.6

Sobrej: $\text{Im}(T) = \text{Tudo}$

Injetiva: $N(T) = \{\vec{0}\}$ 6.6

ricardo−ferreira.pt

Mudança de Base

4.6

1 $M_{C\leftarrow B} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{b_1} & \cdots & \overrightarrow{b_n} \end{bmatrix}, M_{B\leftarrow C} = (M_{C\leftarrow B})^{-1}$

2 T na base B? $A_B = M_{B\leftarrow C} A_C M_{C\leftarrow B}$ 6.3

A_B diag? Base vetores próprios 7.1

A_B FCJ? Base vet. próp. generalizados 7.2, 7.3

Ortogonalidade

8.5

$\langle\vec{u},\vec{v}\rangle = \vec{u}^T P\vec{v}, \|\vec{x}\| := \sqrt{\langle\vec{x},\vec{x}\rangle}, \text{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) := \left(\frac{\langle\vec{u},\vec{v}\rangle}{\|\vec{v}\|^2}\right)\vec{v}$ 8.2

Base Ortonormada: Gram-Schmidt + Normalizar 8.3

$d(\vec{u}, W) := \|\vec{u} - P_W(\vec{u})\| = \left\|\vec{u} - \sum \text{proj}_{\overrightarrow{w_i}}(\vec{u})\right\|$ 8.4

$W^\perp = N(AP)$ 8.5

Gostaste? Dá like! 👍

Matéria em falta? Comenta! 💬

Website

[Link Website](#)
(clica!)

Playlist

[Link Playlist](#)
(clica!)

ricardo–ferreira.pt